第 10 回

統計量

・母集団と標本

image

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\ (\text{標本}) \underset{\text{推測}}{\overset{\text{無作為抽出}}{\rightleftarrows}} \text{母集団}$$

統計的推測

$X_1,X_2,\cdots,X_n\ :\perp\sim$ 分布 F(母集団分布)

上記のイメージについて、分布 F について知るには、パラメータμやσ^{2}について知る必要がある。

$$\mu:\text{母平均} \overset{\text{推定}}{\longleftarrow} \bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \ (\text{標本平均})$$

$$\sigma^2:\text{母分散} \overset{\text{推定}}{\longleftarrow} S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2 \ (\text{標本分散})$$

$X_1,X_2,\cdots,X_n$ の関数 $T(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ を統計量と言い、この分布を標本分布と言う。

成り立つ定理は以下の通り

$X_1,X_2,\cdots,X_n :\perp\sim F(\mu,\sigma^2)$

・$$\Rightarrow \begin{cases} E(\bar{X})=\mu, V(\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{n} \\ E(s^2)=\sigma^2, E(S^2)=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2 \left(s^2=\dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right) \end{cases}$$

(s^2 のことを不偏標本分散と言う。)

これが統計学における最重要定理だ!!

・カイ２乗分布(S^2 と s^2 の分布)

定義

$$Z_1, Z_2, \cdots, Z_k :\perp\sim N(0,1) \Rightarrow Y = \sum_{i=1}^{k} Z_i^2$$

となる確率分布を自由度 k の χ^2(カイ２乗)分布と言い、χ^2(k)で表す。

成り立つ定理は以下の通り

・ $X_1, X_2, \cdots, X_n :\perp\sim N(0,1) \Rightarrow Y \equiv \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$

＊ $Z_1 = \dfrac{X_1 - \mu}{\sigma}, Z_2 = \dfrac{X_2 - \mu}{\sigma}, \cdots, Z_n = \dfrac{X_n - \mu}{\sigma^2} = N(0,1)$ なので

$\sum_{i=1}^{n} Z_i^2 \sim \chi^2(n)$ である。