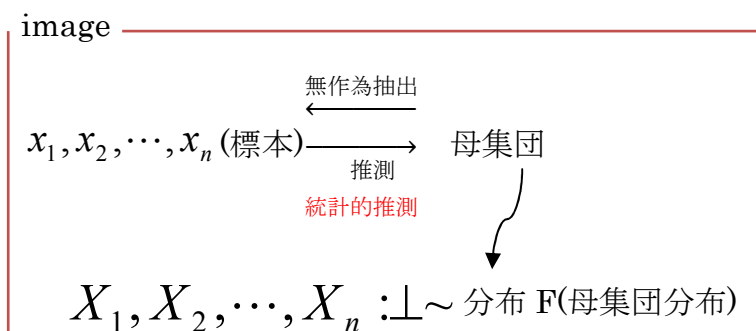


## 第 10 回

### 統計量

- 母集団と標本



上記のイメージについて、分布  $F$  について知るには、パラメータ  $\mu$  や  $\sigma^2$  について知る必要がある。

$$\mu : \text{母平均} \xleftarrow{\text{推定}} \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ (標本平均)}$$

$$\sigma^2 : \text{母分散} \xleftarrow{\text{推定}} S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ (標本分散)}$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$  の関数  $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$  を **統計量** と言い、この分布を **標本分布** と言う。

成り立つ定理は以下の通り

$$X_1, X_2, \dots, X_n : \text{i.i.d} \sim F(\mu, \sigma^2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E(\bar{X}) = \mu, V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \\ E(S^2) = \sigma^2, E(S^2) = \frac{n-1}{n} \sigma^2 \left( s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right) \end{cases}$$

( $s^2$  のことを **不偏標本分散** と言う。)

**これが統計学における最重要定理だ!!**

- カイ 2 乗分布 ( $S^2$  と  $s^2$  の分布)

定義

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_k \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0,1) \Rightarrow Y = \sum_{i=1}^k Z_i^2$$

となる確率分布を自由度  $k$  の  $\chi^2$  (カイ 2 乗) 分布と言い、 $\chi^2(k)$  で表す。

成り立つ定理は以下の通り

$$\bullet X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} N(0,1) \Rightarrow Y \equiv \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$* Z_1 = \frac{X_1 - \mu}{\sigma}, Z_2 = \frac{X_2 - \mu}{\sigma}, \dots, Z_n = \frac{X_n - \mu}{\sigma} = N(0,1) \text{ なので}$$

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi^2(n) \text{ である。}$$