問. $H_n(x) := e^{-\frac{x^2}{2}} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{\frac{x^2}{2}}$ とするとき, 以下を示せ.

(1) $H_n(x)$ は n 次の多項式

(2) $\left(\dfrac{d}{dx} + x\right) H_n(x) = H_{n+1}(x)$

(3) $\dfrac{d}{dx} H_n(x) = n H_{n-1}(x)$

(1) <方針> ・一般的に示す… ??
・数学的帰納法ならいけそう.

nに関する数学的帰納法により,
"$H_n(x)$ は n 次の多項式である" … ☆ ことを示す.

(i) $n=1$ のとき (← $n \in \mathbb{N}$ と考えたが, $n=0$ でも成立している)

$$H_1(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} e^{\frac{x^2}{2}} = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$$

で これは $H_1(x)$ が 1次の多項式であることを示している.

(ii) $n = k$ ($k \in \mathbb{N}$) のとき ☆が成立すると仮定したとき
$H_{k+1}(x)$ が $k+1$ 次の多項式であることを示す.

<解答1>

まず, $H_k(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \dfrac{d^n}{dx^n} e^{\frac{x^2}{2}}$ の両辺に $e^{\frac{x^2}{2}}$ をかけると

$$e^{\frac{x^2}{2}} H_k(x) = \frac{d^k}{dx^k} e^{\frac{x^2}{2}} \cdots ①$$

を得る.

ここで

$$\begin{aligned}
H_{k+1}(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} e^{\frac{x^2}{2}} \\
&= e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^k}{dx^k} e^{\frac{x^2}{2}} \right) \\
&= e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{d}{dx} \left(e^{\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right) \quad (\because ①) \\
&= e^{-\frac{x^2}{2}} \left(e^{\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{dH_k(x)}{dx} + x e^{\frac{x^2}{2}} H_k(x) \right)
\end{aligned}$$