No. 14

Date

(3) $f(x) = a^{x^2}$

$f'(x) = a^{x^2}\log a \cdot (x^2)'$

$= 2x a^{x^2} \log a$ //

$x^2 = u$ とおくと

$f(x) = a^u$

$\dfrac{df(x)}{dx} = \dfrac{f(x)}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$

$= u \log a \cdot (x^2)'$

ということ.

問. Leibnitz則

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)\cdot g(x)) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, f^{(k)}_{(x)}\, g^{(n-k)}_{(x)} \quad \cdots ☆$$ を示せ.

数学的帰納法で ☆ を証明する.

(i) $n=1$ のとき

$$(☆の左辺) = \frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\because 積の微分法)$$

$$(☆の右辺) = \sum_{k=0}^{1} {}_1C_k\, f^{(k)}_{(x)}\, g^{(1-k)}_{(x)} = {}_1C_0 f(x) g'(x) + {}_1C_1 f'(x) g(x)$$

$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

よって $n=1$ のとき ☆ は成立.

(ii) $n=m$ $(m\in\mathbb{N})$ のとき ☆ が成立すると仮定する.

すなわち $\dfrac{d^m}{dx^m}(f(x)\cdot g(x)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} {}_mC_k\, f^{(k)}_{(x)}\, g^{(m-k)}_{(x)}$ が成立すると仮定する.

このとき

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}}(f(x)\cdot g(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^m}{dx^m}(f(x)\cdot g(x))\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=0}^{m} {}_mC_k\, f^{(k)}_{(x)}\, g^{(m-k)}_{(x)}\right) \quad (\because 帰納法の仮定)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k \frac{d}{dx}\left(f^{(k)}_{(x)}\cdot g^{(m-k)}_{(x)}\right)$$

項別微分

$$= \sum_{k=0}^{m} {}_mC_k\left(f^{(k+1)}_{(x)}\cdot g^{(m-k)}_{(x)} + f^{(k)}_{(x)}\cdot g^{(m-k+1)}_{(x)}\right)$$

$(\because$ 積の微分法$)$