# 3　4回目講義の補足プリント

前回の授業の訂正：学生の身長 $y$ を父親の身長 $x$ で説明する回帰直線 $y = 120.45 + 0.311x$ を導く際、板書では $b = S_{xy}/S_x^2 = 31.28/(6.2)^2 = 0.311$ としていましたが、分子の 31.28 を 12.03 に置き換えて、$b = S_{xy}/S_x^2 = 12.03/(6.2)^2 = 0.311$ として下さい。分子の $S_{xy} = 12.03$ は $x(=$ 身長$)$ と $y(=$ 父親の身長$)$ の共分散です。31.28 は「身長と体重の共分散」でした。

## 3.1　基本的な概念

- 試行：実験や観測などを試行 (trial) と呼ぶ。
- 標本空間 $\Omega$：試行の結果の集合を標本空間 (sample space) と言う。
- 標本点 $\omega$：標本空間 $\Omega$ の各要素を標本点 (sample point) と言う。

**例 3.1.** (コイン投げ) コインを 1 回投げ、表か裏かを観測するという試行を考える。このとき標本空間は

$$\Omega = \{\text{ 裏}, \text{表 }\} \Big( = \{0, 1\} \Big)$$

で与えられる。“裏” $(= \omega)$ は 1 つの標本点である。//

**例 3.2.** (サイコロ投げ) サイコロを１回投げ、出目を観測するという試行を考える。このとき標本空間は

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

となる。//

標本空間 $\Omega$ の部分集合を事象 (event) と言う。

- 標本空間 $\Omega$ は $\Omega$ の部分集合であるから、$\Omega$ は１つの事象である (全事象)。
- 空集合 $\phi = \{\}$ も $\Omega$ の部分集合であるから、$\phi$ は１つの事象である (空事象)。
- ただ 1 つの要素のみからなる事象 $\{\omega\}$ を根元事象という。

**例 3.3.** (コイン投げ) コインを 2 回投げて、表 $(= 1)$ が出るか裏 $(= 0)$ が出るかを観測するという試行を考えると、標本空間 $\Omega$ は

$$\Omega = \Big\{(0, 0),\ (0, 1),\ (1, 0),\ (1, 1)\Big\}$$

となる。ここで興味のある事象としては以下のものが挙げられる。

$$\begin{aligned} A &= \Big\{1 \text{ 回目は表}\Big\} = \Big\{(1, 0),\ (1, 1)\Big\} \\ B &= \Big\{2 \text{ 回目は表}\Big\} = \Big\{(0, 1),\ (1, 1)\Big\} \\ C &= \Big\{\text{少なくとも 1 回表が出る }\} = \Big\{(0, 1),\ (1, 0),\ (1, 1)\Big\} \\ D &= \Big\{\text{ちょうど 1 回表が出る }\} = \Big\{(0, 1),\ (1, 0)\Big\} \end{aligned}$$

ここで、事象 $C$ は「$A$ または $B$ の何れかが起こる」と解釈出来る事象である $(:C = A \cup B)$。//

**例 3.4.** (株価) 明日の A 社の株価を観測する場合、$\Omega = (0, \infty)$ となる。今日の株価が 100 円だとすれば、「明日の株価は今日より高い」という事象は、$(100, \infty)$ となる。//

## 3.2　事象の演算など

- 補事象、余事象 $\cdots$ $A$ が起こらないという事象

$$A^c = A \text{ の補事象} = \{A \text{ に含まれない標本点}\}$$

- 和事象 $\cdots$ $A$ または $B$ が起こるという事象

$$A \cup B = A \text{ と } B \text{ の和事象} = \{A \text{ または } B \text{ に含まれる標本点}\}$$

- 積事象 $\cdots$ $A$ と $B$ の両方が起こるという事象

$$A \cap B = A \text{ と } B \text{ の積事象} = \{A \text{ と } B \text{ の両方に含まれる標本点}\}$$

- 互いに排反 $\cdots$ 事象 $A, B$ が $A \cap B = \phi$ を満たすとき、$A$ と $B$ は互いに排反であると言う。$A$ と $B$ は同時に起こり得ないことを表している。

**公式 3.1.（基本公式，各根元事象が等確率の場合）** 標本空間が有限集合 $\Omega = \{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ でかつ，各根元事象の確率が等しい場合，すなわち

$$P(\{x_1\}) = P(\{x_2\}) = \cdots = P(\{x_n\}) = \frac{1}{N}$$

となる場合，任意の事象 $A$ の確率は

$$P(A) = \frac{A \text{ に含まれる要素の数}}{N}$$

となる．□

**例 1. (練習)** この例では各根元事象の確率は全て等しく $1/6$ であるから，公式が使える．例えば，$\{$ 偶数の目が出る $\} = \{2, 4, 6\}$ という事象の確率は，この事象に含まれる要素の数が 3 であることから，$3/6$ となる：

$$P(\{\text{ 偶数の目が出る }\}) = P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \tag{3.1}$$

同様に，$P(\{4 \text{ 以下の目が出る }\}) = P(\{1, 2, 3, 4\}) = 4/6 = 2/3$.□

**公式 3.2. (コイン投げ)** 歪みのないコインを $n$ 回投げたとき表が $k$ 回出る事象の確率は

$$P\Big(\{k \text{ 回表が出る }\}\Big) = \frac{{}_nC_k}{2^n} \quad (k = 0, 1, \cdots, n).$$

である。□

## 3.3　条件付確率、乗法公式、全確率の公式

- 条件付き確率の計算練習：サイコロを 2 つ同時に振り、$A = \{$ 少なくとも一方は 4 である $\}$、$B = \{$ 目の和が 9 以上である $\}$ としたとき、$P(B|A)$ を求めよ。

- 乗法公式が適した例（枝分かれの構造がある場合）：５本中２本があたりであるようなくじを、B 君が先に引き、A 君が後に引くとする。事象 $A$、$B$ をそれぞれ、

$$A = \{A \text{ 君が当たる }\}, \quad B = \{B \text{ 君が当たる }\}$$

とする。このとき、

$$P(B) = \frac{2}{5}, \quad P(A|B) = \frac{1}{4}$$

であるから、乗法公式より

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

同様に考えると、$P(B^c) = 3/5$ と $P(A|B^c) = 2/4$ から、$P(A \cap B^c) = P(A|B^c)P(B^c) = 3/10$ が分かる。よって、

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c) = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} = \frac{2}{5}.$$

- 全確率の公式の練習：ある大学の男女比は 3:1 であり、男子学生の 4 割、女子学生の 2 割が運転免許を持つものとする。学生を一人任意に選んだ時、その者が運転免許保有者である確率は幾らか。選ばれた学生が男子であるという事象を $M$ と置き、免許保有者であるという事象を $L$ と置くと、

$$P(M) = \frac{3}{4}, \ P(M^c) = \frac{1}{4}; \ \ P(L|M) = \frac{4}{10}, \ P(L|M^c) = \frac{2}{10}$$

である。他方、求める確率は $P(L)$ である。全確率の公式より、

$$P(L) = P(L|M)P(M) + P(L|M^c)P(M^c) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{2}{10} = \frac{7}{20}.$$

## 3.4 事象の独立性の例

**例 2.** **(食中毒の原因)** ビュフェ形式の食事会などで、ある食品 B を食べたという事象を $B$、食中毒症状を示したという事象を $A$ で表す。このとき、$P(A|B)$ は食品 B を食べたという条件の下で食中毒症状を示す条件付確率、$P(A|B^c)$ は食べなかったという条件の下で食中毒症状を示す条件付確率である。この 2 つの条件付確率が等しければ、$A$ と $B$ が独立であり、食品 B は食中毒の原因ではないと考えられる。

例えば、100 人が参加したとして

| | $A$(食中毒症状を示す) | $A^c$(示さない) | 計 |
|---|---|---|---|
| $B$(食べている) | 12 人 | 48 人 | 60 人 |
| $B^c$(食べていない) | 10 人 | 30 人 | 40 人 |
| 計 | 22 人 | 78 人 | 100 人 |

であったとする。表より、$P(A \cap B) = 12/100$、$P(B) = 60/100$ が読み取れるから、

$$P(A|B) = \frac{12/100}{60/100} = \frac{12}{60} = 0.20. \tag{3.2}$$

同様に、$P(A \cap B^c) = 10/100$、$P(B^c) = 40/100$ より、$P(A|B^c) = 10/40 = 0.25$ が得られる。両者の値に大きな違いはなく、食品 B が原因とは考えにくい。□

### 3.5　ベイズの定理の応用例

**例 3. (言葉の認知率と年齢)** あるインターネットスラング（例えば orz 等）の認知率は

10-20 代の 80%，30 代の 50%，40 代以上の 20%

であるものとする。あるインターネットサイトを利用する人の年齢比率が

10-20 代： 40%，30 代： 30%，40 代以上： 30%

であるとする。

事象として

$$E = \{ \text{スラングを知っている} \},\ E^c = \{ \text{知らない} \}$$

を考えると、$\Omega = E \cup E^c$ である．また，利用者の年齢を

$$A = \{10\text{-}20\ \text{代}\},\ B = \{30\ \text{代}\},\ C = \{40\ \text{代以上}\}$$

とおくと，やはり $\Omega = A \cup B \cup C$ である．

上記の比率データから次のことが分かる。

$$\begin{aligned} &P(A) = 0.4,\ P(B) = 0.3,\ P(C) = 0.3 \\ &P(E|A) = 0.8,\ P(E|B) = 0.5,\ P(E|C) = 0.2. \end{aligned}$$

ここで，$P(E|A)$ は、利用者が 10-20 代であるという条件の下でそのスラングを知っている確率（10-20 代の中でその言葉を知っている人の割合）である．$P(E|B)$ と $P(E|C)$ についても同様である．

時折自分のブログに現れて不思議なコメントする年齢不詳のコメント者 X 氏に興味があるものとする。あるコメントで X 氏がそのスラングを使用したとする。X 氏が 10-20 代である確率は幾らか。

X 氏がそのスラングを知っているという情報を得る前は、X 氏が 10-20 代である確率は 40%（$= P(A)$）と考える以外にないだろう。同様に、30 代である確率は 30%($= P(B)$)、40 代以上である確率は 30%($= P(C)$) である:

$$(P(A),\ P(B),\ P(C)) = (0.4,\ 0.3,\ 0.3).$$

これを事前分布という。

しかし、X 氏がそのスラングを知っていることが分かったのであるから、我々の興味は、$P(A|E)$、$P(B|E)$, $P(C|E)$ に移る。ここで、例えば $P(A|E)$ は、スラングを知っているという条件の下で 10-20 代であるという条件付確率（そのスラングを知っている人に占める 10-20 代の割合）である。$P(B|E)$ と $P(C|E)$ についても同様である．

確率 $P(A|E)$ を求めよう。

$$P(A|E) = \frac{P(E \cap A)}{P(E)}$$

であり、分子は乗法公式より

$$P(E \cap A) = P(E|A)P(A) = 0.8 \times 0.4 = 0.32.$$

分母は全確率公式より

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B) + P(E|C)P(C) \\ &= 0.8 \times 0.4 + 0.5 \times 0.3 + 0.2 \times 0.3 = 0.53. \end{aligned}$$

これより $P(A|E)=0.32/0.53=0.604$ を得る。即ち、X 氏がそのスラングを知っているという情報を得た後に、X 氏が 10-20 代である確率は 60.4% $(=P(E|A))$ となる。同様にして $P(B|E)=(0.5\times0.3)/0.53=0.283$ と $P(C|E)=(0.2\times0.3)/0.53=0.113$ も得られる。即ち、30 代である確率は 28.3%$(=P(B|E))$、40 代以上である確率は 11.3%$(=P(C|E))$ となる:

$$(P(A|E),\ P(B|E),\ P(C|E))=(0.604,\ 0.283,\ 0.113).$$

これを事後分布という。

□