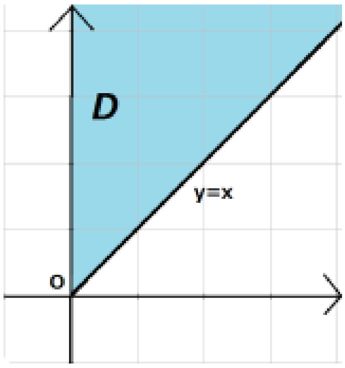
数学 I 演習問題解答　(時弘)

[問題-1]　$f_n(x) = 0$ であるので，$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0$．また，$0 < x \leq 1$では与えられた x に対して，$n_0(x) := \left[\frac{2}{x}\right] + 1$とすれば，$n \geq n_0(x)$ ならば必ず$\frac{2}{n} < x$であるから，$f_n(x) = 0$ となる．　したがって，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$．よって,$\{f_n(x)\}$は $0 \leq x \leq 1$ において各点で$f(x) \equiv 1$に収束する．

もしも$\{f_n(x)\}$ が一様収束するとすれば，各点でも収束し，その収束値は同じであるから$f(x) \equiv 0$に収束する．一様収束の定義から

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \epsilon\, \mathbb{Z}, s.t. n \geq n_\varepsilon \ \rightarrow\ \forall x \in [0,1], |f_n(x) - 0| < \varepsilon$$

となるはずだが，$x = \frac{1}{n}$ では$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n$ であるので，上記の関係を満たすことはありえない．よって一様収束ではない．



[問題-2]　(1)極座標を利用する．

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx\right)^2 = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta\ re^{-ar^2} = \pi \int_0^{\infty} e^{-at} dt = \frac{\pi}{a}$$

求める値は必ず正の値であるので，$\sqrt{\frac{\pi}{a}}$.

(2) 積分範囲は $D = \{(x,y)|0 \leq x, x \leq y\} = \{(x,y)|0 \leq y, 0 \leq x \leq y\}$ であるので,(右上図参照)

$$\text{与式} = \int_0^{\infty} dy \int_0^{y} dx\, e^{-y^2} = \int_0^{\infty} ye^{-y^2} dy = \frac{1}{2}$$

(3) 3 次元の極座標を利用する．

$$\text{与式} = \int_0^1 dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\ r^2 \sin\theta \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$= 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \mathrm{dr}$$

$$= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\, t dt = \pi^2$$

[問題-3]

$\widetilde{D}\ :=\left\{(r,\theta)|0\le r\le 2a\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$

また$\tilde{f}(r,\theta):=\mathrm{f(x,y)}=\mathrm{r}$であり Jacobian は r である．したがって，

$$\text{与式}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2a\cos\theta}dr\,r^2\ =\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8a^3cos^3\theta}{3}d\theta\ =\ \frac{32a^3}{9}$$

[問題-4] (1)$0\le\mathrm{x}\le\pi$ では $|\sin x|\le|x|$ であるので

$$\lim_{\rho\to+0}\int_\rho^\pi\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\ \le\ \lim_{\rho\to+0}\int_\rho^\pi\left|\frac{x}{x}\right|dx\ =\ \pi$$

したがって，絶対収束する．

(2) $\sin(x+n\pi)=(-1)^n\sin x$ であるので

$$\boldsymbol{I}=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}dx+\ \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^N\int_0^\pi\frac{(-1)^k\sin x}{x+k\pi}dx\right)$$

となることに注意する．

$$\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\ =\ \int_0^\pi\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx+\ \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{k=1}^N\int_0^\pi\left|\frac{\sin x}{x+k\pi}\right|dx\right)$$

また$\int_0^\pi\left|\frac{\sin x}{x+k\pi}\right|dx\ \ge\ \frac{1}{(k+1)\pi}\int_0^\pi|\sin x|dx\ =\frac{2}{(k+1)\pi}$ であるから，

$$\int_0^\infty\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx\ \ge\ \int_0^\pi\left|\frac{\sin x}{x}\right|dx+\ \lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N\frac{2}{(k+1)\pi}$$

この右辺は発散するから，絶対収束ではない．

(3) $a_k\ =\ \int_0^\pi\frac{\sin x}{x+k\pi}dx$ とおくと，$\{a_k\}$は単調減少であり，かつ，$\lim_{k\to\infty}a_k\ =0$．したがって，$\sum_{k=1}^\infty(-1)^k a_k$ は収束する． $\boldsymbol{I}=\int_0^\pi\frac{\sin x}{x}dx+\sum_{k=1}^\infty(-1)^k a_k$ であるので収束する．