$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$ である.

〈(4)の証明〉

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \frac{1}{b_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \quad (\because (3)より)$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \quad (\because 補題) \quad //$$

問2.4 "収束する数列の部分列は同じ値に収束する"ことを証明せよ.

$\boxed{ポイント}$ 収束の定義に戻って考える.

$\{a_n\}$がαに収束するということは,
任意の$\varepsilon > 0$に対して適当な$N > 0$が存在して, $N > n$をみたす
すべてのnに対して
$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ となることである.
だから$\{a_n\}$の部分列$\{a_{n_j}\}$に対してNより大きいn_jは
$|a_{n_j} - \alpha| < \varepsilon$ となるから収束列の部分列は収束する. //

問2.5 授業でやった.

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ の収束性を示せ.

(2) 一般に$\{a_n\}$が単調減少数列で$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$であるとき,
$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ は収束することを示せ。 (← (2)は(1)の$\sum (-1)^k \frac{1}{k}$の一般的な形)

(1) これは命題3.1.の(1)と同じだけで,難しいので書きます.
$\left| \sum_{k=m}^{n} \frac{x^k}{k!} \right|$ がmを十分大きくとったとき,いくらでも小さくできることを示せばよい.