(4) (考え方)

(3) を利用することを考えると $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$ を示せればよいとわかる.

補題を設定する.

・補題: $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\forall n\,[a_n \neq 0, \alpha \neq 0] \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$

・証明

(方針) $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| < \varepsilon$ を示したい.

$|a_n - \alpha|$ を作りたいので

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha - a_n}{a_n \cdot \alpha}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{a_n}\right|\left|\frac{1}{\alpha}\right||\alpha - a_n|$$

よって $\left|\frac{1}{a_n}\right|$ を上から押さえる, つまり $|a_n|$ を下から押さえるように考える.

(証明)

$|a_n - \alpha| < \left|\frac{\alpha}{2}\right|$ はある自然数 N_1 において,

$|a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|^2 \varepsilon}{2}$ はある自然数 N_2 において成り立つ.

また,

この形をつくる

$$|\alpha| = |a_n + \underline{(\alpha - a_n)}|$$

$$\leq |a_n| + |\alpha - a_n|$$

$$< |a_n| + \left|\frac{\alpha}{2}\right| \quad (n \geq N_1 \text{ のとき})$$

$\therefore$ $n \geq N_1$ に対して

$$|\alpha| < |a_n| + \left|\frac{\alpha}{2}\right|$$

$$\therefore \left|\frac{\alpha}{2}\right| < |a_n| \quad \Leftarrow \text{押さえられた!!}$$

ここで

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \left|\frac{1}{a_n} \cdot \frac{1}{\alpha}(\alpha - a_n)\right|$$

$$= \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n||\alpha|} < \frac{\frac{|\alpha|^2 \varepsilon}{2}}{\left|\frac{\alpha}{2}\right||\alpha|} = \varepsilon$$