No. 4

Date

(2) a_n の単調増加性は明らかとしてよい.
また, 数学的帰納法により, $a_n < 2$ を示す.
・ $n=1$ のとき $\sqrt{1} < 2$ は明らか
・ $n=k$ のとき成立すると仮定すると ($k>1$)

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} &= \sqrt{1+a_k} \\
&< \sqrt{1+2} \quad (\because \text{帰納法の仮定}) \\
&< 2
\end{aligned}
$$

よって収束する. (収束値は $a=\sqrt{1+a}$ をとけばよい)

命題 2.1
$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がともに収束し, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とする.
このとき以下の性質が成り立つ.

(1) $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \alpha+\beta$

(2) $c\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} c a_n = c\alpha$

(3) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \alpha\beta$

(4) $b_n \neq 0$, $\beta\neq 0$ ならば $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

(1) は授業でやった. (後の形をきれいにするためだけの理由)

(2) 任意の $\varepsilon>0$ に対してある十分大きな $N_1\in\mathbb{N}$ をとると
$|a_n-\alpha| < \frac{\varepsilon}{|c|}$ が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
|ca_n - c\alpha| &= |c(a_n-\alpha)| \\
&= |c||a_n-\alpha| \\
&< |c|\cdot\frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

$\therefore \lim_{n\to\infty} c a_n = c\alpha$ //