エネルギー密度

$$u = \frac{U}{Sd} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}DE$$

単位体積あたり u のエネルギーが、極板間の空間に蓄えられている : 電場のエネルギー

○ 誘電率 ε の一様等方媒質中に電荷が密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ で分布.

微小体積 dv の持つエネルギー dU

$$dU = \frac{1}{2}(\rho dv)\phi \quad \left(U = \frac{1}{2}QV \text{の応用}\right)$$

電位

全エネルギー $U = \int dU = \frac{1}{2}\int \rho\phi\, dv$

$$\rho = \mathrm{div}\,\mathbb{D}$$

一方、$\mathrm{div}(\phi\mathbb{D}) = \phi\,\mathrm{div}\,\mathbb{D} + \mathbb{D}\cdot\mathrm{grad}\,\phi$ (ベクトル解析の公式)

$$\therefore \phi\,\mathrm{div}\,\mathbb{D} = \mathrm{div}(\phi\mathbb{D}) - \mathbb{D}\cdot\mathrm{grad}\,\phi$$

$$\begin{aligned}
\therefore U &= \frac{1}{2}\int \phi\rho\, dv \\
&= \frac{1}{2}\int \phi\,\mathrm{div}\,\mathbb{D}\, dv \\
&= \frac{1}{2}\int \mathrm{div}(\phi\mathbb{D})\, dv - \frac{1}{2}\int \mathbb{D}\cdot\mathrm{grad}\,\phi\, dv \\
&= \frac{1}{2}\int_{\text{C上(表面)}} \underbrace{\phi\mathbb{D}\cdot d\mathbb{S}}_{\to\, 0\ (\text{無限遠})} + \frac{1}{2}\int \mathbb{D}\cdot\mathbb{E} \quad \because)\ \mathbb{E} = -\mathrm{grad}\,\phi \\
&= \frac{1}{2}\int \mathbb{D}\cdot\mathbb{E}\, dv \\
&= \int u\, dv
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{u = \frac{1}{2}\mathbb{D}\cdot\mathbb{E}}$$

◦ 電場中にある物体に働く力.

1.1 真空中.

仮想的な面を考えて、面に対してどのような力が働くかを考える.

$3 \times 3 = 9$ 成分：応力テンソル

Maxwell 応力テンソル：(17)式

$$T_{ij} = \varepsilon_0 E_i E_j = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbb{E}^2 \delta_{ij} \qquad (i, j = x, y, z)$$

クロネッカーのデルタ

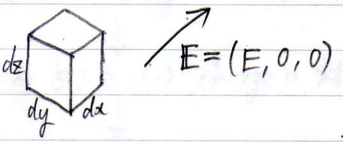
$\left\{ \begin{array}{l} i\text{軸に垂直な面を通して、}i\text{座標の大きい側から} \\ \text{小さい側にかかる力の}j\text{成分} \end{array} \right\}$ (単位面積あたり)

1.2 物質中

$$T_{ij} = D_i E_j - \frac{1}{2}\mathbb{D}\cdot\mathbb{E}\,\delta_{ij}$$

1.3 応用

1.3.1 電気力線にかかる力.



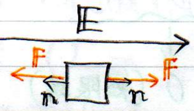
$$\left\{ \begin{aligned} T_{xx} &= \varepsilon_0 E_x E_x - \frac{1}{2}\varepsilon_0 \mathbb{E}^2 \cdot 1 \\ &= \varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad (E = E_x) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ T_{yy} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ T_{zz} &= -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

あとは全て0

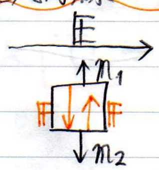
・電気力線の方向にかかる力

$$\mathbb{F} = \int_{CE} \mathbb{T}_{xx} \cdot d\mathbb{S} \qquad (21)\text{式}$$

張力



・電気力線に垂直な方向にかかる力



圧力

(電気力線の垂直な方向から押される力)