(iii) エネルギー

$\int_{t_0}^{t} \sum \dot{\vec{r_i}} \times ② \, dt$ より、

$$\left[\frac{1}{2}\sum m_i \dot{\vec{r_i}}^{2}\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \left\{ \underbrace{\sum \vec{r_i}\cdot\dot{\vec{r_i}}}_{\text{外力のなす仕事}W} + \underbrace{\sum \vec{F_i}'\cdot\dot{\vec{r_i}}}_{\text{内力のなす仕事}W'} \right\} dt$$

運動エネルギーTの変化

$\left(\vec{F_i}' = \sum_{j \neq i} \vec{F_{ij}}\right)$

$$T - T_0 = W + W'$$

内力がポテンシャル U' を有するとき、$W' = -(U' - U_0')$

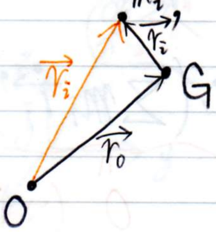
だから、$T + U' = E$ とすれば

$$E - E_0 = W$$

F：質点系の熱力学的エネルギー
U'：内部エネルギー

外力がポテンシャル U を有するとき、$E + U = $ 一定

(iv) 重心に関する定理



$$\vec{r_i} = \vec{r_0} + \vec{r_i}'$$

$$\therefore \dot{\vec{r_i}} = \dot{\vec{r_0}} + \dot{\vec{r_i}}'$$

これらを④に代入すると、

$$\sum_i m_i \vec{r_i}' = 0, \quad \sum_i m_i \dot{\vec{r_i}}' = 0 \quad \cdots\cdots ⑦$$

質点系の角運動 $\vec{L}$ は、

$$\vec{L} = \sum \vec{r_i} \times m_i \dot{\vec{r_i}} = \sum m_i (\vec{r_i} \times \dot{\vec{r_i}})$$

$$= \sum m_i (\vec{r_0} + \vec{r_i}') \times (\dot{\vec{r_0}} \times \dot{\vec{r_i}})$$

$$= (\vec{r_0} \times \dot{\vec{r_0}}) \sum m_i + \sum m_i (\vec{r_i}' \times \dot{\vec{r_i}}') + \vec{r_0} \times \left(\sum m_i \dot{\vec{r_i}}'\right) + \left(\sum m_i \vec{r_i}'\right) \times \dot{\vec{r_0}}$$

0 (∵②)

$$= \underbrace{\vec{r}_0 \times M\dot{\vec{r}}_0}_{\parallel} + \underbrace{\sum \vec{r}_i{}' \times m\dot{\vec{r}}_i{}'}_{\parallel}$$

$$\therefore\ \vec{L} = \vec{L}_0 + \vec{L}' \quad \cdots\cdots ⑧$$

重心の角運動量　重心に相対的な質点の角運動量

一方、力のモーメント $\vec{N}$ は、

$$\vec{N} = \sum(\vec{r}_0 + \vec{r}_i{}') \times \vec{F}_i = \vec{r}_0 \times \sum \vec{F}_i + \sum_i \vec{r}_i{}' \times \vec{F}_i$$

$$\therefore\ \vec{N} = \vec{N}_0 + \vec{N}' \quad \cdots\cdots ⑨$$

ここで、

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{r}_0 \times M\ddot{\vec{r}}_0 = \vec{r}_0 \times \sum \vec{F}_i = \vec{N}_0 \quad \cdots\cdots ⑩$$

(∵⑤)

したがって、⑥より、

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{N}' \quad \cdots\cdots ⑪$$

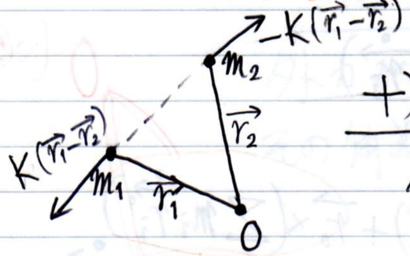
運動エネルギー T に対しては、

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i \dot{\vec{r}}_i{}^2 = \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}}_i{}')^2$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\sum m_i\right)\dot{\vec{r}}_0{}^2}_{T_0} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum m_i \dot{\vec{r}}_i{}'^2}_{T'} + \underbrace{\dot{\vec{r}}_0 \cdot \left(\sum m_i \dot{\vec{r}}_i{}'\right)}_{=0\ (\because ⑦)}$$

$$\therefore\ T = T_0 + T' \quad \cdots\cdots ⑫$$

(例) 二体問題



$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 = K(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \cdots\cdots ⑬$$

$$+)\ m_2\ddot{\vec{r}}_2 = -K(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad \cdots\cdots ⑭$$

$$m_1\ddot{\vec{r}}_1 + m_2\ddot{\vec{r}}_2 = M\ddot{\vec{r}}_0 = 0$$

重心は等速度運動をなす。