

2008 年度夏学期 数学 II① 期末試験

試験時間：90分 問題用紙：1枚 解答用紙：2枚 計算用紙：1枚

持ち込み：不可 担当教員：梶原

以下の問題について、解答用紙に答えよ。ただし、行列の成分はすべて実数（あるいは変数）を考えるものとする。また、どの問題の解答であるかが明確にわかるように解答用紙に記し、解答は答えのみでなく、答えに至る過程についても説明すること。

1. 次の行列の行列式を求めよ。(1) $\begin{bmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 2 & x \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & b & c & 0 \\ 0 & b & c & d \\ 0 & 0 & c & d \end{bmatrix}$

2. 次の行列の逆行列を求めよ。 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

3. 次の行列の階数を求めよ。 $\begin{bmatrix} 5-a & -6 & 5 & -15 \\ 3 & -4-a & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 11-a & -36 \\ 0 & 0 & 3 & -10-a \end{bmatrix}$

4. 行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & -2 \\ -6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2)(1) の各固有値に関する固有ベクトルを（パラメータを用いてすべて）求めよ。

5. 4本の1次独立な4次元列ベクトル a, b, c, d を考える。次の問いに答えよ。

(1) 4次正方形行列 $A = [a \ b \ c \ d]$ は正則行列であることを証明せよ。

(ヒント：正方形行列が正則であるための（列ベクトルの1次独立性以外の）条件を1つ挙げ、説明する。）

(2) 任意の4次元列ベクトルは、 a, b, c, d の1次結合で一意的に表されることを示せ。

(3)(1) の A の逆行列 A^{-1} を $A^{-1} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ (P, Q は 2×4 行列) と書く。このとき、連立方程式 $Qx = o$ の解はすべて、 a, b の1次結合で表されることを示せ。

6. 正則な上三角行列の逆行列は上三角行列であることを証明せよ。