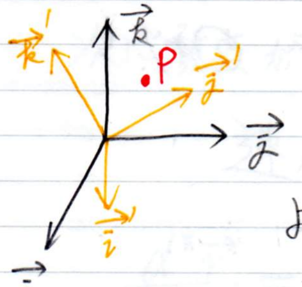
6. 回転する座標系に対するベクトルの微分.

静止座標系 (x, y, z) に対して、回転する座標系 (x', y', z') を考えると、



$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ にくっついて一緒に動いている質点の位置ベクトルを $\vec{r}$ とする。

よって $\vec{r} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$ において、

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{dy'}{dt} = \frac{dz'}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{d\vec{r}}{dt} = x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{i}'}{dt} &= \omega_{11}\vec{i}' + \omega_{12}\vec{j}' + \omega_{13}\vec{k}' \\ \frac{d\vec{j}'}{dt} &= \omega_{21}\vec{i}' + \omega_{22}\vec{j}' + \omega_{23}\vec{k}' \\ \frac{d\vec{k}'}{dt} &= \omega_{31}\vec{i}' + \omega_{32}\vec{j}' + \omega_{33}\vec{k}' \end{aligned}\right\} \cdots\cdots ②$$

と書く。

$\vec{i}'\cdot\vec{i}' = 1$, $\vec{i}'\cdot\vec{j}' = 0$ などを微分すれば

$$\vec{i}'\frac{d\vec{i}'}{dt} = 0, \quad \frac{d\vec{i}'}{dt}\vec{j}' + \vec{i}'\frac{d\vec{j}'}{dt} = 0$$

などの関係があるので、②より

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$$

$$\omega_{12} + \omega_{21} = 0, \quad \omega_{23} + \omega_{32} = 0, \quad \omega_{31} + \omega_{13} = 0$$

ゆえに、独立なものは3個で、

$$\begin{cases} \omega_1 = \omega_{23} = -\omega_{32} \\ \omega_2 = \omega_{31} = -\omega_{13} \\ \omega_3 = \omega_{12} = -\omega_{21} \end{cases}$$

と書けば、②より

$$\begin{cases} \dfrac{d\vec{i}'}{dt} = \omega_3 \vec{j}' - \omega_2 \vec{k}' \\ \dfrac{d\vec{j}'}{dt} = -\omega_3 \vec{i}' + \omega_1 \vec{k}' \\ \dfrac{d\vec{k}'}{dt} = \omega_2 \vec{i}' - \omega_1 \vec{j}' \end{cases}$$

これを①に代入すると、

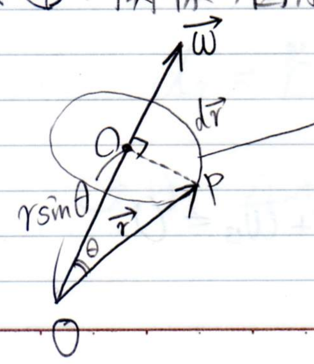
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = (\omega_2 z' - \omega_3 y')\vec{i}' + (\omega_3 x' - \omega_1 z')\vec{j}' + (\omega_1 y' - \omega_2 x')\vec{k}' \quad \cdots\cdots ③$$

ここで、$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{i}' + \omega_2 \vec{j}' + \omega_3 \vec{k}'$

を導入すれば、③より

$$\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \quad \cdots\cdots ④$$

※④の関係の図示



$\vec{\omega}$に垂直で、
点Pを含む円であり
角速度$|\omega|$で回転している。

$|\vec{v}| = v = \omega r \sin\theta$

実際、③より

$x' : y' : z' = \omega_1 : \omega_2 : \omega_3$

を満たす直線上の点(x', y', z') … (次頁へ)