プリントNo. 1 (10/05/07)

○ 命題論理の言語

1. 語彙

・論理記号

論理演算子（論理結合子）：$\wedge$　　$\vee$　　$\rightarrow$　　$\neg$

括弧：(　　)

・非論理記号

命題記号：英大文字 A、･･、Z と、それらに添え字をつけたもの ← 言語を表す。

および　× ← 矛盾を表す. ex. ある命題と、その否定.

2. 論理式の形成規則

・命題論理の論理式は次の形成規則によって定義される記号の列である。

（1）どの命題記号も論理式である。

（2）ϕ、ψ が論理式のとき、$(\phi \wedge \psi)$ は論理式である。

（3）ϕ、ψ が論理式のとき、$(\phi \vee \psi)$ は論理式である。

（4）ϕ、ψ が論理式のとき、$(\phi \rightarrow \psi)$ は論理式である。

（5）ϕ が論理式のとき、$\neg\phi$ は論理式である。

（6）以上の各項によって論理式と認められるもののみが論理式である。

○ 命題論理の推論規則

1. 連言

I：導入規則

E：除去　〃

$$\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}\,(\wedge \mathrm{I}) \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\phi}\,(\wedge \mathrm{E}1) \qquad \frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\,(\wedge \mathrm{E}2)$$

2. 選言

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi}\,(\vee \mathrm{I}1) \qquad \frac{\psi}{\phi \vee \psi}\,(\vee \mathrm{I}2) \qquad \frac{\phi \vee \psi \quad \begin{matrix}[\phi] \\ \vdots \\ \omega\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\psi] \\ \vdots \\ \omega\end{matrix}}{\omega}\,(\vee \mathrm{E})$$

φ, ψを仮定して φ, ψに各々規則を適用していって同じωが示せたときωを結論できる。
→この後 φ, ψには規則の適用が終わったことを示すために[ ]をつける。

3．条件法

∨Eと同様

$$\dfrac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\\ \psi\end{matrix}}{\phi\to\psi}\ (\to \mathrm{I})\qquad\qquad \dfrac{\phi\quad \phi\to\psi}{\psi}\ (\to \mathrm{E})$$

4．否定

∨Eと同様

$$\dfrac{\begin{matrix}[\phi]\\ \vdots\\ \times\end{matrix}}{\neg\phi}\ (\neg \mathrm{I})\qquad\qquad \dfrac{\phi\quad \neg\phi}{\times}\ (\neg \mathrm{E})$$

以上10コのI、Eから成る体系を
最小命題論理という。
（Mで表すことがある）

$$\dfrac{\times}{\phi}\ (\text{矛盾規則})$$

実用面からいえば、それ以前に
勝手に仮定した記号の
否定を導出し、~~仮定に~~[ ]
をつけてキャンセルすることとなる。

以上11コからなる体系を
直観主義命題論理という。
（Iで表すことがある）

$$\dfrac{\neg\neg\phi}{\phi}\ (\text{二重否定除去規則})$$

以上12コからなる体系を
古典命題論理という。
（Cで表すことがある。）

(注意)　$\begin{matrix}[\alpha]\\ \vdots\\ \beta\end{matrix}$ の形の部分は、論理式βへと至る証明で置き換えられなければならない。そのとき、αを仮定（仮に前提）してもよい。また、[] は、当該の規則の適用が終わった後で、仮定αがキャンセルされ、証明全体の前提として考える必要がなくなることを示す。

☆参考文献

前原昭二著『記号論理入門』、日本評論社、１９６７&２００５.

テニント著『自然演繹の論理学』、八千代出版、１９８１.

ノルト&ロハティン著『現代論理学（I)』、オーム社、１９９４.