$C \neq 0$ となるためには

$$kL = n\pi \quad \therefore k = \frac{n\pi}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

$$\therefore \psi(x) = C \sin \frac{n\pi}{L} x$$

▷ 規格化条件 … 全確率の和は1!!

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1$$

$$\int_0^L |C|^2 \sin^2 \frac{n\pi}{L} x \, dx$$

$$\vdots$$

$$= \frac{|C|^2}{2} L$$

$$= 1$$

$$\therefore |C|^2 = \frac{2}{L}$$

$$C = \sqrt{\frac{2}{L}} \underbrace{e^{i\phi}}$$

→ $\sqrt{\frac{2}{L}}$ としても一般性は失われない。

発展

(*) 波動関数の全体の位相は物理現象に影響を与えない。

例) $\psi(x) = i\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x$

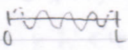
$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

測っているのは $\psi(x)$ ではなく $|\psi(x)|^2$ だから!!

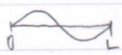
$$\therefore \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x \quad \left(k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \Leftrightarrow E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \underbrace{n^2}_{\text{量子数}} \quad (n = 1, 2, \cdots)$$

▷ 波動関数と固有エネルギー

$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x$  節の数 $n-1$

$\vdots$

$\psi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi}{L} x$ 

$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{\pi}{L} x$ 

両端を固定端とする定在波!!