(2) $\left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \right.$ の収束の証明と同様に考えればよい。$\left. \right)$

$\left| \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k+1} a_k \right| < \varepsilon \quad (n, m \geq n_\varepsilon \in \mathbb{N})$ を示せばよい。

（ある n_ε 以上の n, m を選べばよいということ）

・ $n-m$ が奇数のとき

$$\left| \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k+1} a_k \right| = \left| a_m - a_{m+1} + a_{m+2} - \cdots - a_n \right|$$

$n-m$ は奇数.

$$= (a_m - a_{m+1}) + (a_{m+2} - a_{m+3}) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \cdots ①$$

$$= a_m - (a_{m+1} - a_{m+2}) - \cdots\cdots - (a_{n-2} - a_{n-1}) - a_n \cdots ②$$

①, ② より

$$0 \underset{①}{<} \left| \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k+1} a_k \right| \underset{②}{\leq} a_m$$

・ $n-m$ が偶数のときも同様。

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$|a_{n_\varepsilon} - 0| < \varepsilon \quad \therefore a_{n_\varepsilon} < \varepsilon$ なる $n_\varepsilon \in \mathbb{Z} \geq 0$ を選べば

$m, n \geq n_\varepsilon \ (n \geq m)$ ならば必ず

$$\left| \sum_{k=m}^{n} (-1)^{k+1} a_k \right| \leq a_m < \varepsilon$$

よって $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$ は収束する。 //

問. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ を示せ.

〈方針1〉 定義式にあてはめる。

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{d}{dx} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right\}$$

※

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dx} \left\{ (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (2k+1)(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \right\}$$