2011/01/30
文責: リッキー、長谷川

電磁気学 A（前田京剛）過去問 2009 年度第 3 問解答例

※書いてあることに誤りと思われるような点を見つけたら、知らせてください。。。

[3] 図 2 (a) の様に、半径 d 及び $D(d< D)$ からなる非常に長い中空の円筒状導体を軸を共通にして置く。これは同軸ケーブルと呼ばれる。この同軸ケーブルの内導体と外導体が移動体の間に図のように交流電圧$V = V_0 \sin \omega t$を加えると矢印のように電流が流れる。これについて、以下の問いに答えよ。なお、真空の誘電率、透磁率をそれぞれε_0、μ_0とおく。

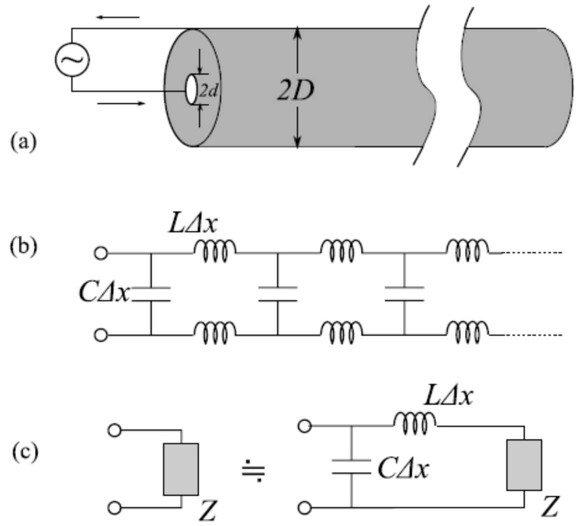


図 2　同軸ケーブルとその特性インピーダンスの模式図

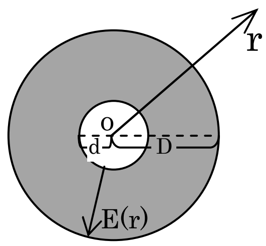
(A)

1) この同軸ケーブルの単位長さあたりの容量C を求めよ。

2) この同軸ケーブルの単位長さあたりのインダクタンス L を求めよ。

[解答例]

下図のように、同軸ケーブルからの距離を r とおく。



(A)

1) 単位長さあたり、内導体に Q、外導体に－Q の電荷を与えると、対称性と Gauss の法則から、$\mathrm{d} \le \mathrm{r} \le \mathrm{D}$ に放射状の電場が生じ、その大きさを E(r)とすると Gauss の法則より、

$$2\pi r E(r) = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

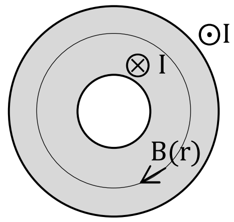
$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$

これより、内導体と外導体の電位差 V は、

$$V = \int_d^D E(r)dr = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}[\ln r]_d^D = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{D}{d}$$

よって単位長さあたりの容量 Cは、$C = \frac{Q}{V} = \dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{D}{d}}$

2) 右図のように逆向きに同じ大きさ I の電流を流すと、対称性、真磁荷不在、Ampere の法則より、磁場は図のように生じる。その大きさを B(r)とすると、



$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$$

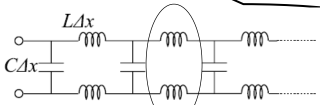
電流と交差する磁束は単位長さあたり

$$\Phi = 1 \times \int_d^D \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{D}{d}$$

よって、インダクタンス $L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{d}$

Ricky のコメント: 自信ないけど
これ以外に解釈を思いつきません
でした

(b)を(c)
みたいに



$L\Delta x$ と解釈すれば
整合するハズ

(B) この同軸ケーブルを長さ Δx の多数の部分に分けると、それぞれの部分は、インダクタンス$L\Delta x$ のコイル、容量$C\Delta x$ のコンデンサーからなる微小LC 回路と考えることができる。すなわち、同軸ケーブルの等価回路として、微小LC 回路が無限につながったものを考えることができる。(図2(b))

3) この回路は、無限のLC 回路からなっているために、そのインピーダンスZ は、図2(c) のように、端に微小LC 回路をもう一つ付け足しても変化しないと考えられる。図2(c) の式を、$Z, L, C,\ \Delta x,\ \omega$ を用いて表せ。ただし、インダクタンス$L\Delta x$ のコイル、容量$C\Delta x$ のコンデンサーは、それぞれ各周波数ω の交流に対して、$i\omega L$, $1/i\omega C$ (i は虚数単位) の抵抗として働くことを利用してよい。

4) これからZ を求めよ。

5) Z において$\Delta x \to 0$ の極限をとったものを同軸ケーブルの特性インピーダンスZ_0 という。Z_0を求めよ。

6) 1) 及び 2) で得た L, C の値を代入することで、特性インピーダンスZ_0 を求めよ。

(B)

3) 複素インピーダンスを考え、直列、並列の合成抵抗の式より、

$$\frac{1}{Z} \fallingdotseq \frac{1}{\frac{1}{i\omega C\Delta x}} + \frac{1}{i\omega L\Delta x + Z}$$

4) 3)の式より、

$$\frac{\cancel{i\omega L\Delta x}}{Z(Z+i\omega L\Delta x)} = \cancel{i\omega C\Delta x}$$

$$Z^2 + i\omega L\Delta x \cdot Z - \frac{L}{C} = 0$$

$$Z = \frac{-i\omega L\Delta x \pm \sqrt{-(\omega L\Delta x)^2 + \frac{L}{C}}}{2}$$

Ricky のコメント：符号の選択がわかりません。|Z|とかは変わらないのでどっちでもいいんじゃないでしょうか。

5) $Z_0 = lim_{\Delta x \to 0} \frac{-i\omega L\Delta x + \sqrt{-(\omega L\Delta x)^2 + \frac{L}{C}}}{2}$

勝手に+を採用

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

6) $Z_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi}(ln\frac{D}{d}) \cdot \frac{2\pi\varepsilon_0}{ln\frac{D}{d}}}$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$$

[以上]