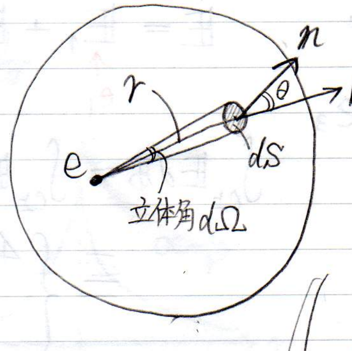
(証明)

(a) 点電荷1個の電場

(i) charge が C内にある場合.

$$\theta \leq \frac{\pi}{2}$$

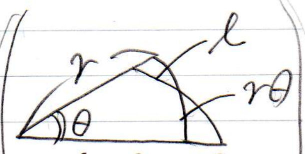
$$\cos\theta \geq 0 \quad (\therefore |\cos\theta| = \cos\theta)$$



$$|\mathbb{E}| = k\frac{e}{r^2}$$

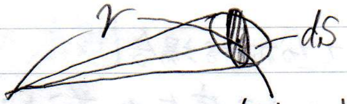
$$\therefore E_n = k\frac{e}{r^2}\cos\theta$$

法線成分 normal component.



$l\cos\theta = r\theta$

$\therefore l = \dfrac{r\theta}{\cos\theta}$



$dS|\cos\theta| = r^2 d\Omega$

また、$dS = \dfrac{r^2 d\Omega}{|\cos\theta|}$

$$\therefore \int_{C上} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = \int_{C上} k\frac{e}{\cancel{r^2}}\cancel{\cos\theta}\cdot\frac{\cancel{r^2}d\Omega}{\cancel{|\cos\theta|}} = ke\int_{C上} d\Omega$$

立体角を全て足し合わせる.

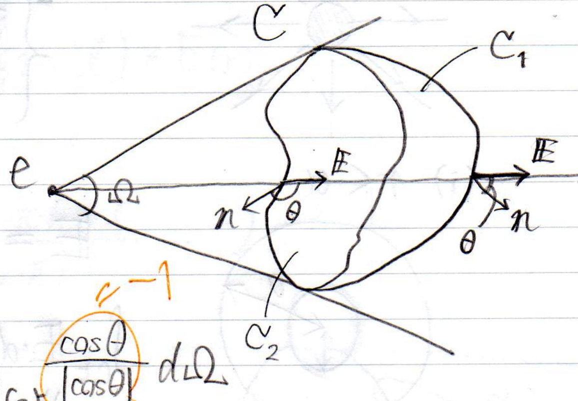
$$= ke\cdot 4\pi = 4\pi ke$$

$$= 4\pi k\cdot(C内の電荷)$$

(ii) charge が C外にある場合.

C_1: $\theta \leq \frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \cos\theta \geq 0$

C_2: $\theta > \frac{\pi}{2}$ $\quad\therefore \cos\theta < 0$



$$\int_{C上} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = \int_{C_1上} + \int_{C_2上}$$

$$= ke\int_{C_1上}\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}d\Omega + ke\int_{C_2上}\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|}d\Omega$$

$\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|} = 1$ (C_1上), $\frac{\cos\theta}{|\cos\theta|} = -1$ (C_2上)

$$= ke\int_{C_1上}d\Omega - ke\int_{C_2上}d\Omega$$

$$= ke\Omega - ke\Omega = 0$$

$$= 4\pi k\times(C内の電荷)$$

(b) 点電荷が複数ある場合.

$\cdot e_2$

e_1 $\cdot e_3$

$$\mathbb{E} = \underset{\uparrow \atop e_1}{\mathbb{E}_1} + \underset{\uparrow \atop e_2}{\mathbb{E}_2} + \underset{\uparrow \atop e_3}{\mathbb{E}_3} + \cdots$$

$$\int_{C上} \mathbb{E}\, d\mathbb{S} = \int_{C上} \mathbb{E}_1 d\mathbb{S} + \int_{C上} \mathbb{E}_2 d\mathbb{S} + \int_{C上} \mathbb{E}_3 d\mathbb{S} + \cdots$$

$$= \left\{ \begin{matrix} 4\pi k e_1 \\ \text{or} \\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4\pi k e_2 \\ \text{or} \\ 0 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4\pi k e_3 \\ \text{or} \\ 0 \end{matrix} \right\} + \cdots$$

$$= 4\pi k \times (C\text{内にある電荷})$$

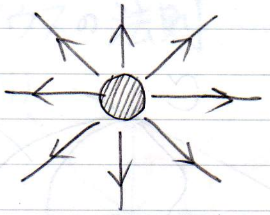
(c) 電荷が連続して分布する場合.

$\rho(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ による寄与を考えれば、明らか。

(Q.E.D.)

◦ ガウスの法則の応用

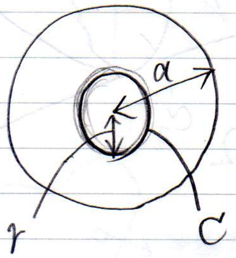
(例1) 一様に帯電した球 (半径 a, 電荷 Q) が作る電場



対称性から予想される.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{電場の向き} \cdots \text{半径方向 (動径方向)} \\ \text{電場の強さ} \cdots \text{中心からの距離, } r \text{ だけの関分.} \end{array} \right.$

(i) $r < a$



$$\mathbb{E} = E(r)\, \mathbb{e}_r$$

$$\int_{C上} \mathbb{E} \cdot d\mathbb{S} = 4\pi k \times Q \times \left\{ \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi a^3} \right\}$$

$$\parallel$$

$$4\pi r^2 \times E(r)$$