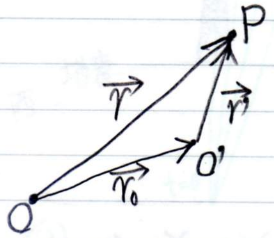
第10回　力学A ①

Date H22・6・22 No. ①

17. 曲面上の運動
18. 摩擦力

→ 時間の都合上、省略

19. 相対運動



$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{r'}$$

$$\therefore \ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r_0}} + \ddot{\vec{r'}}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = m(\ddot{\vec{r_0}} + \ddot{\vec{r'}}) = \vec{F} = \vec{F'}$$

$$\therefore m\ddot{\vec{r'}} = \vec{F'} - \underbrace{m\ddot{\vec{r_0}}}_{\text{見かけの力}}$$

上記と、第1章5より、原点Oを有する静止座標系と
原点O'を有する回転座標系を考えると、
$\vec{\omega}$を角速度ベクトルとして、

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r_0}}{dt^2} + \frac{d^{*2}\vec{r'}}{dt^2} + 2\vec{\omega}\times\frac{d^*\vec{r'}}{dt} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r'}) + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r'}$$

$\left(\frac{d^*}{dt}\right.$ は、回転座標系における時間微分$\left.\right)$

$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ より、 $(\vec{F} = \vec{F'})$

$$m\frac{d^{*2}\vec{r'}}{dt^2} = \vec{F'} \underbrace{- m\frac{d^2\vec{r_0}}{dt^2}}_{\text{原点の加速度運動による見かけの力}} + \underbrace{2m\left(\frac{d^*\vec{r'}}{dt}\times\vec{\omega}\right)}_{\text{コリオリ力}}$$

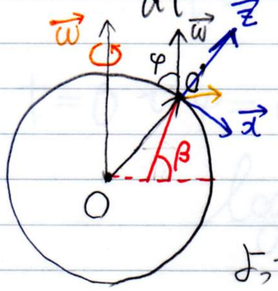
$$+ \underbrace{m\vec{\omega}\times(\vec{r'}\times\vec{\omega})}_{\text{遠心力}} + \underbrace{m(\vec{r'}\times\dot{\vec{\omega}})}_{\text{角加速度による見かけの力}}$$

……………①

☆ 地上の物体の運動

地球の公転運動が等速運動とみなせる十分短い時間の運動を考える。
自転の角速度を $\vec{\omega}$ (定ベクトル) とする。

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d^*\vec{A}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{A}$$ より、



$$\frac{d\vec{r_0}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r_0}$$

$$\frac{d^2\vec{r_0}}{dt^2} = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r_0})$$

よって、① の右辺第2項は、

$$\begin{aligned} -m\frac{d^2\vec{r_0}}{dt^2} &= -m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r_0}) \\ &= m\vec{\omega}\times(\vec{r_0}\times\vec{\omega}) \quad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

となり、自転による遠心力を表す。

遠心力は赤道上 ($\vec{\omega}$ が $\vec{r_0}$ に垂直) で最大となるが、
それでも重力の約 $1/300$ に過ぎない。また、① の右辺第4項
$m\vec{\omega}\times(\vec{r'}\times\vec{\omega})$ は、$|\vec{r'}| \ll |\vec{r_0}|$ より、② と比較して無視できる。
地球の引力と ② の遠心力をあわせた力の方向を鉛直下方とする。
そして、鉛直上方に z 軸、これに垂直な水平面内で南方に x 軸、
東方に y 軸をとり、鉛直線が赤道面となす角度を β とする。
地理緯度

$$\begin{cases} \omega_x = -\omega\cos\beta \\ \omega_y = 0 \\ \omega_z = \omega\sin\beta \end{cases}$$

だから、$\vec{r'}:(x, y, z)$ とすれば、① より、

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 2m\cos\dot{y}\sin\beta + X \\ m\ddot{y} = -2m\omega(\dot{x}\sin\beta + \dot{z}\cos\beta) + Y \\ m\ddot{z} = 2m\omega\dot{y}\cos\beta - mg + Z \end{cases} \quad \cdots\cdots ③$$

(ただし、X, Y, Z は重力以外に質点に働く力の x, y, z 成分である。)