H22/05/02

間違いを発見したら、すぐさま知らせてください。

力学Ａ①　授業ノート

第２回

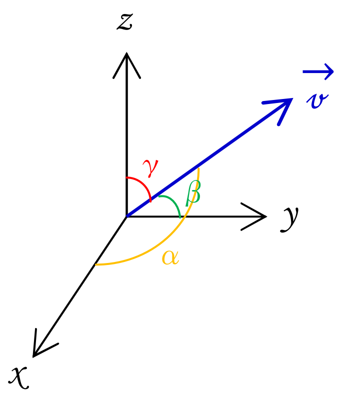
第Ⅰ篇　質点及び剛体の力学

第１章　ベクトル算法

１．ベクトル

ベクトル・・・方向線　$\vec{A}$

スカラー・・・実数　　θ

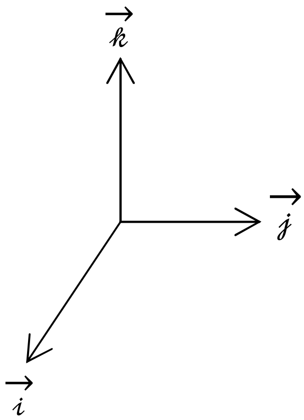


ベクトル$\vec{v}$ の方向余弦

$\vec{v}$ が x軸，y軸，z軸の正の向きとなす角の余弦

$\lambda = \cos\alpha \quad \mu = \cos\beta \quad \nu = \cos\gamma$

２．ベクトルの加法



$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ：基本ベクトル

$$\left|\vec{i}\right| = \left|\vec{j}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1$$

$$\vec{v} = v_i\,\vec{i} + v_j\,\vec{j} + v_k\,\vec{k}$$

デカルト座標Ｄと極座標Ｐ

２次元　　D（ x ，y ）

　　　　　P（ r ，φ ）

$$\begin{pmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

３次元　　D（ x ，y ，z ）

　　　　　P（ r ，θ ，φ ）

$$\begin{pmatrix} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{pmatrix}$$

間違いを発見したら、すぐさま知らせてください。

注）角度はラジアン単位

$$\theta = \frac{\ell}{r} \text{（ラジアン）}$$

cf. 立体角はステラジアン

$$\alpha = \frac{S}{r^2} \text{（ステラジアン）}$$

3．ベクトルの乗法

(1) スカラー積（内積）

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = |\mathbb{A}||\mathbb{B}|\cos\theta$$

$\mathbb{i},\mathbb{j},\mathbb{k}$　はそれぞれi,j,kのベクトルを表す。書くの面倒だから。

（成分）$\mathbb{A}=A_x\mathbb{i}+A_y\mathbb{j}+A_z\mathbb{k}$

$\mathbb{B}=B_x\mathbb{i}+B_y\mathbb{j}+B_z\mathbb{k}$

すると、$\left\{\begin{array}{l}\mathbb{i}\cdot\mathbb{i}=\mathbb{j}\cdot\mathbb{j}=\mathbb{k}\cdot\mathbb{k}=1\\ \mathbb{i}\cdot\mathbb{j}=\mathbb{j}\cdot\mathbb{k}=\mathbb{k}\cdot\mathbb{i}=0\end{array}\right\}$　より、

$$\mathbb{A}\cdot\mathbb{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

(2) ベクトル積（外積）

$$\mathbb{A}\times\mathbb{B} = (|\mathbb{A}||\mathbb{B}|\sin\theta)\mathbb{e}$$

$\mathbb{e}$：$\mathbb{A}$をπ以下の角度だけ回転させて$\mathbb{B}$の向きに重ねるとき、右ネジが進む向きを持つ単位ベクトル。

- $\mathbb{A}\times\mathbb{B} = -\mathbb{B}\times\mathbb{A}$
- $c\mathbb{A}\times\mathbb{B} = \mathbb{A}\times c\mathbb{B} = c\,\mathbb{A}\times\mathbb{B}$
- $\mathbb{A}\times(\mathbb{B}+\mathbb{C}) = \mathbb{A}\times\mathbb{B}+\mathbb{A}\times\mathbb{C}$
- $\mathbb{i}\times\mathbb{j}=\mathbb{k}$　・$\mathbb{j}\times\mathbb{k}=\mathbb{i}$　・$\mathbb{k}\times\mathbb{i}=\mathbb{j}$
- $\mathbb{i}\times\mathbb{i}=\mathbb{j}\times\mathbb{j}=\mathbb{k}\times\mathbb{k}=0$

$$\mathbb{A}\times\mathbb{B} = (A_yB_z-A_zB_y)\mathbb{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\mathbb{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\mathbb{k}$$

$$= \begin{vmatrix}\mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

$$(\mathbb{A}\times\mathbb{B})_i = \sum_{a,b=1}^{3}\varepsilon_{iab}A_a B_b$$

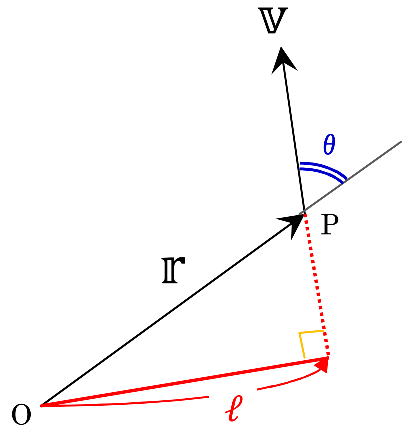
ε_{ijk}：完全対称テンソル

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases}1 & (i,j,k)= (1,2,3)、(2,3,1)、(3,1,2)\\ -1 & (2,1,3)、(1,3,2)、(3,2,1)\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases}$$

cf. クロネッカーのデルタ

$$\delta_{ij} = \begin{cases}1 & (i=j)\\ 0 & (i\neq j)\end{cases}$$

間違いを発見したら、すぐさま知らせてください。



例．ベクトルのモーメント

作用点Ｐを有するベクトル$\mathbb{v}$を考えると、
Ｐの位置ベクトルを$\mathbb{r}$とするとき、

$$\mathbb{N} = \mathbb{r} \times \mathbb{v}$$

を、$\mathbb{v}$の O に関するモーメントという。

$$|\mathbb{N}| = v\ell$$

(3) 三つのベクトルの積

① $\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \times \mathbb{C})$：スカラー

$\Rightarrow \mathbb{A}, \mathbb{B}, \mathbb{C}$ を三積とする、並行六面体の体積

$$\mathbb{A} \cdot (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) = \mathbb{B} \cdot (\mathbb{C} \times \mathbb{A}) = \mathbb{C} \cdot (\mathbb{A} \times \mathbb{B}) = (\mathbb{A},\ \mathbb{B},\ \mathbb{C})$$

$$(\mathbb{A},\ \mathbb{B},\ \mathbb{C}) = \begin{vmatrix} A_i & A_j & A_k \\ B_i & B_j & B_k \\ C_i & C_j & C_k \end{vmatrix}$$

② $\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C})$：ベクトル

$$\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C}) = (\mathbb{A} \cdot \mathbb{C})\mathbb{B} - (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})\mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbb{A} \times (\mathbb{B} \times \mathbb{C})]_i &= \textstyle\sum_{a,b} \mathcal{E}_{iab} A_a (\mathbb{B} \times \mathbb{C})_b \\
&= \sum_{a,b} \mathcal{E}_{iab} A_a \sum_{c,d} \mathcal{E}_{bcd} B_c C_d \\
&= \sum_{a,b,c,d} \mathcal{E}_{bia} \mathcal{E}_{bcd} A_a B_c C_d \\
&= \sum_{a,i,d} (\delta_{ic}\delta_{ad} - \delta_{id}\delta_{ac}) A_a B_c C_d \\
&= \sum_{a} A_a B_i C_a - \sum_{a} A_a B_a C_i \\
&= (\mathbb{A} \cdot \mathbb{C})(\mathbb{B})_i - (\mathbb{A} \cdot \mathbb{B})(\mathbb{C})_i \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

もうパソコンで打ちこむのが面倒になったので、これ以降は、僕が書いたノートをそのままスキャンしてアップします。ご了承ください。