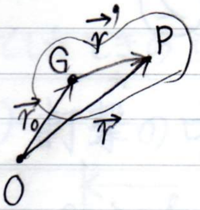
第12回 力学A ①

Date H22. 7. 6 No. ①

22. 剛体の運動方程式

20. と同様にして、連続体としての剛体に対し、



重心：$\vec{r}_0 = \dfrac{\int \vec{r}\,dm}{\int dm} = \dfrac{1}{M}\int \vec{r}\,dm$

運動量：$\vec{P} = \int \vec{v}\,dm = \int \dot{\vec{r}}\,dm = M\dot{\vec{r}}_0$

角運動量：
$$\begin{aligned}\vec{L} &= \int \vec{r}\times\dot{\vec{r}}\,dm \\ &= \vec{r}_0\times M\dot{\vec{r}}_0 + \int \vec{r}'\times\dot{\vec{r}}'\,dm \\ &= \vec{L}_0 + \vec{L}'\end{aligned}$$

運動方程式 $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \int d\vec{F}$, $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \dfrac{d\vec{L}_0}{dt} + \dfrac{d\vec{L}'}{dt}$

$\dfrac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{N}_0 = \vec{r}_0\times\int d\vec{r}$, $\dfrac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{N}' = \int \vec{r}'\times d\vec{F}$ …… ①

重心のまわりの角運動量$\vec{L}'$の方程式①を、
慣性主軸ととった場合の成分表示は、
慣性主軸の角速度を$\vec{\omega}$とすると、6. より、

$$\frac{d^*\vec{L}'}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{L}' = \vec{N}'$$ なので、

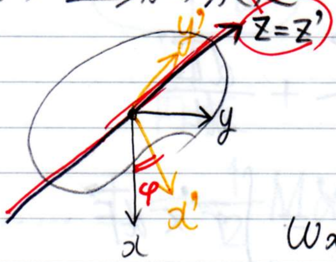
$$\left.\begin{aligned}\vec{L}' &: (A\omega_1,\ B\omega_2,\ C\omega_3) \\ \vec{\omega} &: (\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3) \\ \vec{N} &: (N_1,\ N_2,\ N_3)\end{aligned}\right\}$$ より、

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d\omega_1}{dt} - (B-C)\omega_2\omega_3 &= N_1 \\ B\frac{d\omega_2}{dt} - (C-A)\omega_3\omega_1 &= N_2 \\ C\frac{d\omega_3}{dt} - (A-B)\omega_1\omega_2 &= N_3 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots ②$$

②を、剛体の回転運動に対する Euler 方程式と呼ぶ。

23. 固定軸を有する剛体の運動

(a) 運動の決定



自由度1　φ

$$\frac{dL_z}{dt} = N_z$$ により、運動が決まる。

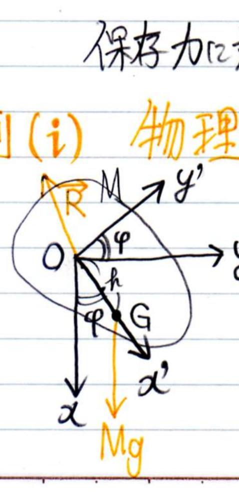
$\omega_x = \omega_y = 0$, $\omega_z = \dot{\varphi}$ だから、

$$L_z = I_{33}\dot{\varphi} = I\dot{\varphi}$$ （Iは、z軸に関する慣性モーメント）

$$\therefore\ I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = N_z \cdots\cdots ①$$

保存力に対して、$\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + U(\varphi) = E \cdots\cdots ②$

例(i) 物理振子



回転半径をkとおくと、

$$I = Mk^2$$

$$I\ddot{\varphi} = -Mgh\sin\varphi$$

$$\therefore\ \ddot{\varphi} = -\frac{gh}{k^2}\sin\varphi$$

（cf）単振子（糸の長さa）

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{a}\sin\varphi$$