(2) は (1) の 解答2 を参照.

(3) $\dfrac{d}{dx}H_n(x)$ を直接計算しても $H_{n-1}(x)$ がくくれる気がしないので
帰納法でとくか, みたいな.

数学的帰納法によって

$$\frac{d}{dx}H_n(x) = nH_{n-1}(x) \quad \cdots\cdots \text{☆} \qquad (n \geq 1 \text{ と考えることにする})$$

を示す.

(i) $n=1$ のとき

$$(\text{☆の左辺}) = \frac{d}{dx}H_1(x) = \frac{d}{dx}x = 1 \quad (H_1(x) = x \text{ は (1)(i) でやった})$$

$$(\text{☆の右辺}) = 1 \times H_0(x) = 1 \times \left(e^{-\frac{x^2}{2}} \times e^{\frac{x^2}{2}}\right) = 1$$

∴ (左辺) = (右辺) より $n=1$ のとき ☆は成立する.

(ii) $n=k$ $(k \geq 1,\ k \in \mathbb{N})$ のとき成立すると仮定する.

すなわち $\dfrac{d}{dx}H_k(x) = kH_{k-1}(x)$ $\qquad (k+1)H_k(x)$

が成立すると仮定するとき, $n=k+1$ のときも成立することを示す.

このとき

$$\frac{d}{dx}H_{k+1}(x) = \frac{d}{dx}\left(\left(\frac{d}{dx}+x\right)H_k(x)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}H_k(x) + xH_k(x)\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}H_k(x)\right) + x\frac{d}{dx}H_k(x) + H_k(x)$$

帰納法の仮定

$$= \frac{d}{dx}\left(kH_{k-1}(x)\right) + x\left(kH_{k-1}(x)\right) + H_k(x)$$

$$= k\left(\frac{d}{dx}+x\right)H_{k-1}(x) + H_k(x)$$

(2) の利用

$$= kH_k(x) + H_k(x) = (k+1)H_k(x)$$