(3) $\dfrac{d}{dx}(x^{-n}) = \lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^{-n} - x^{-n}}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \left\{ \dfrac{1}{(x+h)^n} - \dfrac{1}{x^n} \right\}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \cdot \dfrac{x^n - (x+h)^n}{(x+h)^n x^n}$

$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\dfrac{-1}{(x+h)^n x^n}}_{h\to 0 \text{ で } -\frac{1}{x^{2n}}} \cdot \underbrace{\dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}}_{\text{微分の定義より } \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}}$

$= -\dfrac{1}{x^{2n}} \cdot nx^{n-1}$ （$\lim ab = \lim a \cdot \lim b$ は示されている）

$= -nx^{-n-1}$ （命題 2.1 (3) 参照）

問.

(1) $f(x) = \log(x + \sqrt{a^2+x^2})$

$f'(x) = \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} (x+\sqrt{a^2+x^2})'$

$= \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \left\{ 1 + \dfrac{1}{\cancel{2}} \dfrac{\cancel{2}x}{\sqrt{a^2+x^2}} \right\}$

$= \dfrac{1}{x+\sqrt{a^2+x^2}} \cdot \dfrac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$ //

(2) $f(x) = \log(\cosh x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{\cosh x} (\cosh x)'$

$= \dfrac{\sinh x}{\cosh x}$

$= \tanh x$ //.

参考

$$\begin{cases} \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{cases}$$

h は 双曲線 hyperbolic の頭文字で これらは 双曲線関数 という.