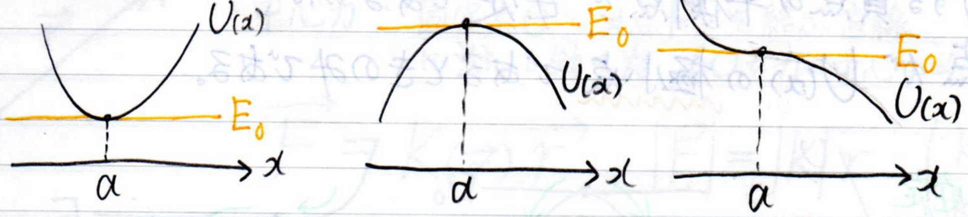
(注) $U'(x)=0$ となる点 x を、$U(x)$ の停留点という。



(a)　　　(b)　　　(c)

$E_0 = U(\alpha)$ のとき、

(a) はもちろん、(b), (c) の場合も、他の点から平衡点に達することはできない。 (6/1 訂正)

∵ $x-\alpha=\xi$ とすれば、$x=\alpha$ のごく近くで

$$E_0 - U = A|\xi|^n \quad (n \geqq 2) \quad (A>0)$$ とおける。

$\xi>0,\ \frac{d\xi}{dt}<0$ の場合、② より、

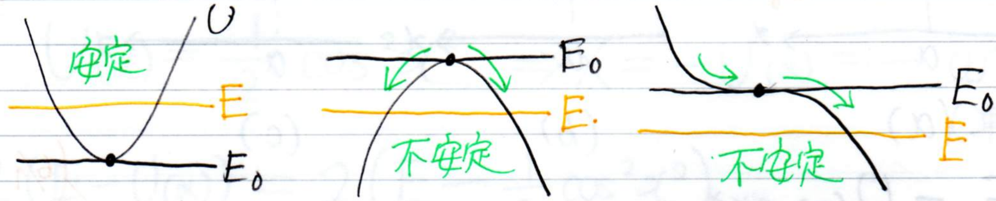
$$-\int \xi^{-\frac{n}{2}}\, d\xi = \sqrt{2A}\, t + (\text{定数})$$

$\xi<0,\ \frac{d\xi}{dt}>0$ の場合もまとめて、

$$\sqrt{2A}\, t + (\text{定数}) = \begin{cases} \dfrac{|\xi|^{-(\frac{n}{2}-1)}}{\frac{n}{2}-1} & (n \geqq 3) \\ -\log|\xi| & (n=2) \end{cases}$$

よって、$\xi \longrightarrow 0$ となるには、$t \to \infty$ を要する。

☆ 位置エネルギーが$U(\alpha)$である保存力の作用のもとに運動する質点の平衡点が安定であるのは、この点が$U(\alpha)$の極小点であるときのみである。



$U''(\alpha) > 0$ なる安定な平衡点の附近に小さな可動区間をもつような運動に対しては、

$$E - E_0 = \varepsilon \ , \ x - \alpha = \xi \text{ として、}$$

$|\xi| \ll 1$ なので、ξ^3 以上を無視すると、

$$E - U(x) = E - \left(E_0 + \frac{1}{2}U''(\alpha)\xi^2\right)$$
$$= \varepsilon - \frac{1}{2}U''(\alpha)\xi^2$$

前節の例(ii)より、運動は、

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{U''(\alpha)}} \text{ を周期とする}$$

振幅 $\sqrt{\dfrac{2\varepsilon}{U''(\alpha)}}$ の単振動となる。

これを平衡点附近の微小振動と呼ぶ。