$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)$$

※ 項別微分の可否は言及していないが，この場合は OK.

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(2k)(-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k)!}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}(-1)(-1)^l \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} \quad (l = k-1 \text{ とおいて})$$

$$= -\sin x$$

<方針2> Euler の公式の利用

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(e^{ix}) = \frac{d}{dx}(\cos x) + \frac{d}{dx}(i\sin x) \quad \cdots ①$$

ここで

$$\frac{d}{dx}(e^{ix}) = ie^{ix} = i(\cos x + i\sin x) = -\sin x + i\cos x \quad \cdots ②$$

なので，①と②の実部と虚部を比較して求める結果を得る.

（補足）

・i は定数なので

$$(e^{ix})' = ie^{ix}$$ とできる.

・$\frac{d}{dx}(\cos x)$, $\frac{d}{dx}(\sin x)$ は，$\cos x$, $\sin x$ の（ここで習った）定義より虚数は入ってこないので，実部と虚部を比較できる.