$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{e^m} = 0$ は 参考書 p21 3) で一般的に示してあるし，同じことだが
$e = 1+(e-1)$ とおいて 2項展開によって m^2 の項を作っても示せるし，
$f(x) = x^\alpha - \alpha \log x$ $(0<\alpha \in \mathbb{R})$ が $x \geq 1$ のとき 0以上となることからも示せる．
よって ① より $\log a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ であり，$y = \log x$ は（狭義の）単調増加
関数なので，$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{1}$ // であるとわかる．

〈方針 2〉 参考書 p21 より，a_n の単調減少性を示す．
これは 対数微分に依る．その後は本と同じ．
本の議論まんま なので 略．

〈方針 3〉 $n>1$ のとき $1 < \sqrt[n]{n}$ は自明なので，$\sqrt[n]{n} < x$ で，
$x \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ なる x を探して ハサミウチの原理を用いる．

$x = 1 + \frac{1}{n^a}$ $(a>0)$ という形ならば $x \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ となる．

$\sqrt[n]{n} \leqq 1 + \frac{1}{n^a} \iff n \leqq \left(1+\frac{1}{n^a}\right)^n$ （両辺正より n 乗しても同値）

ここで $\left(1+\frac{1}{n^a}\right)^n > 1 + {}_nC_1 n^{-a} + {}_nC_2 n^{-2a} + {}_nC_3 n^{-3a}$

（n は十分大きいときを考えてよい．2項展開の利用）

例えば $a = \frac{1}{3}$ のとき

$$\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^n > 1 + n^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2} n^{\frac{1}{3}}(n-1) + \frac{1}{6}(n-1)(n-2)$$
$$> \frac{1}{6} n^2$$

n が十分大きいとき $n < \frac{1}{6} n^2$ であるので

$\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)^n > n$ $\therefore \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

よって $1 < \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \underline{1}$ //

〈方針 1〉 について

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\log n} = e^0 = 1$ と考えていること と同じ．