(1) $|E| < \frac{g}{a}$ (振動)

$\left(\frac{d\varphi}{dt}=0\right.$ になる角を α とする。 $\left.E=-\frac{g}{a}\cos\alpha\right)$

$$\therefore \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{a}(\cos\varphi-\cos\alpha) = 4\frac{g}{a}\left(\sin^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \cdots\cdots ④$$

$$\therefore t = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g}}\int\frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\theta = k\sin\theta \quad \left(-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$$

$$k=\sin\frac{\alpha}{2}<1$$

$\left(-\alpha<\varphi<\alpha,\ \theta=\frac{\pi}{2}\text{ のとき }\alpha\right)$

$t=0$ で $\theta=0$, $\theta>0$ とすると、

$$\left(\because \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = k\cos\theta\, d\theta\right)$$

$$\left(\int\frac{2k\cos\theta\, d\theta}{\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}(1-\sin^2\theta)}}\right)$$

$$t = \sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^\theta\frac{d\theta'}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta'}}$$

ここで、

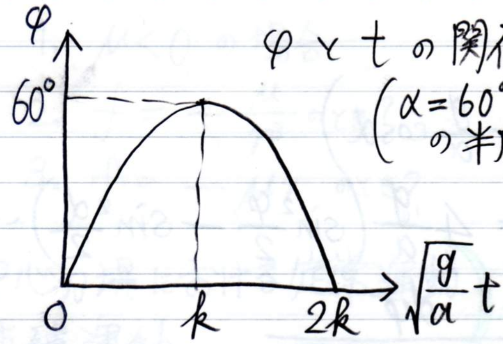
$$w=\int_0^\theta\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad : \text{楕円積分}$$

のとき、

$$\sin\theta = \mathrm{sn}\, w$$

と記し、sn を楕円関数と呼ぶ。

$$\therefore \sin\frac{\varphi}{2} = k\,\mathrm{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{a}}\,t\right)$$

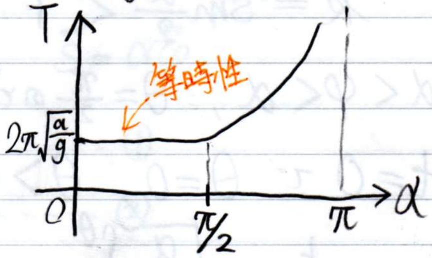


φ と t の関係
($\alpha=60°$ の場合の半周期)

一往復の周期 T は、φ が 0 から α まで増す時間の4倍であるから、

$$T=4\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

$$T=4\sqrt{\frac{a}{g}}K(k) \qquad K(k)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$ ：完全楕円積分



$|\alpha|\ll 1$ のとき、$k\fallingdotseq\frac{\alpha}{2}\ll 1$

$$K(k)=\int_0^{\pi/2}\left(1+\frac{1}{2}k^2\sin^2\theta+\cdots\right)d\theta$$

$$=\pi/2\left(1+\frac{1}{4}k^2+\cdots\right)$$

$$\therefore\ T=2\pi\sqrt{\frac{a}{g}}\left(1+\frac{1}{16}\alpha^2+\cdots\right)$$

注）④ を ② に代入して、

$$T=mg(3\cos\varphi-2\sin\alpha)$$