数学Iの 練習問題の解答例

No. 1

Date

問2-2 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ.

(1) $a_n = \dfrac{n}{1+n^2}$ (2) $a_n = \dfrac{2^n}{1+3^n}$ (3) $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ (4) $a_n = \sqrt[n]{n}$

(1) $\dfrac{n}{1+n^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{n}+n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{0}$ //

(2) $\dfrac{2^n}{1+3^n} = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3^n}+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} \underline{0}$ //

(3) $\dfrac{2^n}{n!} = \dfrac{2\cdot2\cdot2}{1\cdot2\cdot3}\cdot\dfrac{2\cdot2\cdot\cdots\cdot2}{4\cdot5\cdot\cdots\cdot n}$

$< \dfrac{2^3}{3!}\cdot\dfrac{2\cdot2\cdot\cdots\cdot2}{4\cdot4\cdot\cdots\cdot4} = \boxed{\dfrac{2^3}{3!}\cdot\dfrac{1}{2^{n-3}}}$ $\left(\begin{array}{l}例えば\\ \dfrac{2^4}{4!}\cdot\dfrac{1}{2^{n-4}}\end{array}\right)$

nを含む項と含まない項に分けられれば いくつで区切ってもよい.

$\therefore\ 0 < \dfrac{2^n}{n!} < \dfrac{2^3}{3!}\cdot\dfrac{1}{2^{n-3}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

よって ハサミウチの原理より

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!} = \underline{0}$ //

〈参考〉 一般的に $a>1$ を定数として

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!} = 0$ が成り立つ.

証明は "数理系のための〜(理論を中心に)" の p21 参照。

方針は同じ.

(参考書)

(4) 〈方針1〉 自然対数の利用

$a_n = \sqrt[n]{n}$ の両辺に自然対数をとって

$\log a_n = \dfrac{\log n}{n}$ …… ①

ここで $\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{n}$ を求めたい.

いま $n = e^m$ とおくと $n\to\infty$ のとき $m\to\infty$, $\log n = m$

であるので

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\log n}{n} = \lim_{m\to\infty}\dfrac{m}{e^m}$ である.

(この変形は $y=e^x$ の連続性を根拠にしている)