

電磁気学 A (前田京剛) 過去問 2009 年度第 3 問解答例

※書いてあることに誤りと思われるような点を見つけたら、知らせてください。。

[3] 図 2 (a) の様に、半径 d 及び D ($d < D$) からなる非常に長い中空の円筒状導体を軸を共通にして置く。これは同軸ケーブルと呼ばれる。この同軸ケーブルの内導体と外導体が移動体の間に図のように交流電圧 $V = V_0 \sin \omega t$ を加えると矢印のように電流が流れる。これについて、以下の問いに答えよ。なお、真空の誘電率、透磁率をそれぞれ ϵ_0 、 μ_0 とおく。

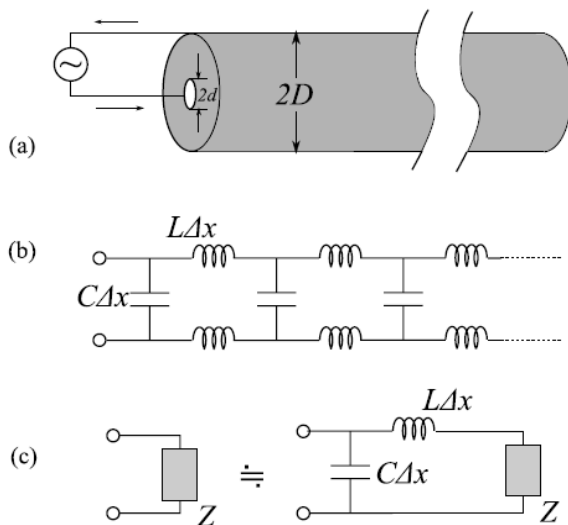


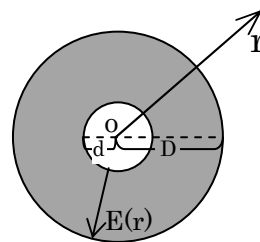
図 2 同軸ケーブルとその特性インピーダンスの模式図

(A)

- 1) この同軸ケーブルの単位長さあたりの容量 C を求めよ。
- 2) この同軸ケーブルの単位長さあたりのインダクタンス L を求めよ。

[解答例]

下図のように、同軸ケーブルからの距離を r とおく。



(A)

1) 単位長さあたり、内導体に Q 、外導体に $-Q$ の電荷を与えると、対称性と Gauss の法則から、 $d \leq r \leq D$ に放射状の電場が生じ、その大きさを $E(r)$ とすると Gauss の法則より、

$$2\pi r E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} Q$$

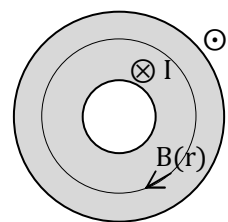
$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r}$$

これより、内導体と外導体の電位差 V は、

$$V = \int_d^D E(r) dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} [\ln r]_d^D = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D}{d}$$

よって単位長さあたりの容量 C は、 $C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{D}{d}}$

2) 右図のように逆向きに同じ大きさ I の電流を流すと、対称性、真磁荷不在、Ampere の法則より、磁場は図のように生じる。その大きさを $B(r)$ とすると、



$$2\pi r B(r) = \mu_0 I$$

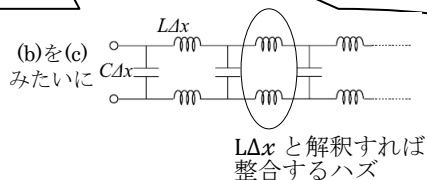
$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$$

電流と交差する磁束は単位長さあたり

$$\Phi = 1 \times \int_d^D \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{D}{d}$$

よって、インダクタンス $L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D}{d}$

Ricky のコメント: 自信ないけど
これ以外に解釈を思いつきません
でした



(B) この同軸ケーブルを長さ Δx の多数の部分に分けると、それぞれの部分は、インダクタンス $L\Delta x$ のコイル、容量 $C\Delta x$ のコンデンサーからなる微小 LC 回路と考えることができる。すなわち、同軸ケーブルの等価回路として、微小 LC 回路が無限につながったものを考えることができる。(図2(b))

3) この回路は、無限の LC 回路からなっているために、そのインピーダンス Z は、図2(c) のように、端に微小 LC 回路をもう一つ付け足しても変化しないと考えられる。図2(c) の式を、 $Z, L, C, \Delta x, \omega$ を用いて表せ。ただし、インダクタンス $L\Delta x$ のコイル、容量 $C\Delta x$ のコンデンサーは、それぞれ各周波数 ω の交流に対して、 $i\omega L$, $1/i\omega C$ (i は虚数単位) の抵抗として働くことを利用してよい。

4) これから Z を求めよ。

5) Z において $\Delta x \rightarrow 0$ の極限をとったものを同軸ケーブルの特性インピーダンス Z_0 という。 Z_0 を求めよ。

6) 1) 及び 2) で得た L, C の値を代入することで、特性インピーダンス Z_0 を求めよ。

(B)

3) 複素インピーダンスを考え、直列、並列の合成抵抗の式より、

$$\frac{1}{Z} \doteq \frac{1}{\frac{1}{i\omega C\Delta x}} + \frac{1}{i\omega L\Delta x + Z}$$

4) 3)の式より、

$$\frac{i\omega L\Delta x}{Z(Z+i\omega L\Delta x)} = i\omega C\Delta x$$

$$Z^2 + i\omega L\Delta x \cdot Z - \frac{L}{C} = 0$$

$$Z = \frac{-i\omega L\Delta x \pm \sqrt{-(\omega L\Delta x)^2 + 4\frac{L}{C}}}{2}$$

Ricky のコメント: 符号の選択がわかりません。|Z|とかは変わらないのでどっちでもいいんじゃないでしょうか。

$$5) Z_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-i\omega L\Delta x + \sqrt{-(\omega L\Delta x)^2 + 4\frac{L}{C}}}{2}$$

勝手に+を採用

$$= \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$6) Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{2\pi} \left(\ln \frac{D}{d}\right) \cdot \frac{\ln \frac{D}{d}}{2\pi\epsilon_0}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \ln \frac{D}{d} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

[以上]