2010年4月22日

数学II演習 ① (2)　　(梶原)

以下の問題から5題選んで答えよ．ただし，表から2題以上，裏から2題以上選ぶこと．

8. 次の3つのベクトルは1次独立であるか．

(1) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$

9. 次の図形を表す方程式を求めよ．

(1) 2点 $(1,1), (3,-3)$ を通る直線．

(2) 3点 $(-1,2,0), (-4,7,-2), (3,-5,1)$ を通る平面．

10. 次のベクトルを求めよ．

(1) $\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}6\\4\\5\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}3\\1\\2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

11. 次の2平面の交わりの直線のベクトル方程式を求めよ．

$x+y+z=0, x-2y+3z=8$

12. 座標平面において，(x,y) が $0 \leq x \leq 3$，$0 \leq y \leq 3$ および $2 \leq x+y \leq 5$ をみたして動くとき，$x+2y$ のとり得る値の範囲を求めよ．

13. 座標空間において，次の3つの矢線ベクトルが作る平行六面体の体積を求めよ．

(1) $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1\\2\\-3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

次回の数学II①演習は5月13日(木)．

14. $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ が任意の矢線ベクトルの大きさを変えないとき，次を示せ．

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -\varepsilon c \\ c & \varepsilon a \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \pm 1,\ a^2 + c^2 = 1.$$

15. 連立方程式

$$(*) \qquad \begin{cases} 2x + ay = 1 \\ 3x + y = b \end{cases}$$

(ただし，a, b は実数) の解の個数に応じて，(a, b) の領域を ab 平面に図示せよ．

16. 前問の連立方程式 $(*)$ について次の問いに答えよ．

(1) a, b がすべての実数を動くとき，$(*)$ の 2 つの式に対応する 2 直線がそれぞれ xy 平面においてどのように変化するか，説明せよ．

(2) xy 平面において，どのような実数 a, b に対しても，$(*)$ の解とならない点 (x, y) を図示せよ．

17. 次の行列の集合 R について，以下の問いに答えよ．

$$R := \left\{ \begin{bmatrix} a & 3b \\ b & a \end{bmatrix} ;\ a, b \text{ は有理数} \right\}$$

(1) R は行列の積に関して閉じていることを示せ．

(2) R に含まれる，零行列でない行列 A は逆行列 A^{-1} を持ち，$A^{-1} \in R$ を示せ．

($\sqrt{3}$ は有理数でないことは証明なしで使ってよい．)

18. 次を計算せよ．ただし，a, b, c は実数とし，$\omega := \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とする．

(1) $\left\langle \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2c \\ a \\ b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2b \\ 2c \\ a \end{bmatrix} \right\rangle$ (2) $\begin{bmatrix} a & 2c & 2b \\ b & a & 2c \\ c & b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2c\omega^2 & 2b\omega \\ b\omega & a & 2c\omega^2 \\ c\omega^2 & b\omega & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 2c\omega & 2b\omega^2 \\ b\omega^2 & a & 2c\omega \\ c\omega & b\omega^2 & a \end{bmatrix}$

(複素数を成分とする行列の積も実数の場合と同様に計算する．)