力がポテンシャル $U(r)$ を有するとき、
単位質量に対して、

$$T = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = \frac{1}{2}\left(\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2}\right)$$

であるから、
$U(r)$ 及び E をそれぞれ単位質量に対する位置エネルギー及び全エネルギーとして、

$$\dot{r}^2 + \frac{h^2}{r^2} + 2U(r) = 2E$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{2(E-U(r)) - \frac{h^2}{r^2}}$$

$$= \pm\frac{\sqrt{2r^2(E-U(r)) - h^2}}{r} \quad \cdots\cdots ⑥$$

及び
$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}} = \pm\frac{r}{h}\sqrt{2r^2(E-U(r)) - h^2} \quad \cdots\cdots ⑦$$

r の時間変化は、位置エネルギーが $W(r) = U(r) + \frac{h^2}{2r^2}$
であるような直線上の運動と同様である。

遠心力のポテンシャル

$r^2\dot{\varphi} = \frac{h^2}{r^3}$

11 の結果を転用すれば、
$E - W(r) \geqq 0$ の部分 (r_1, r_2) が有限であるときには、
r の時間変化は周期的である。
すなわち、
$$2(E - W(r)) = (r - r_1)(r_2 - r)V(r)$$
と置けば、(r_1, r_2) において $V(r)$ は正で
r は t の周期関数となり、
$$\begin{cases} r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) + \frac{1}{2}(r_1 - r_2)\cos\alpha \\ \displaystyle\int \frac{d\alpha}{\sqrt{V}} = t + 定数 \end{cases}$$

周期Tは、

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\alpha}{\sqrt{V\left(\frac{1}{2}(r_1+r_2)+\frac{1}{2}(r_1-r_2)\cos\alpha\right)}}$$

次に、rとφの関係は、⑦より、

$$h\int \frac{dr}{r\sqrt{2r^2(E-U(r))-h^2}} = \varphi + 定数$$

ゆえに、rが有限区間(r_1, r_2)で変化するような運動においては、rの変化の一周期の間にφは

往復

$$\Phi = 2h\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r\sqrt{2r^2(E-U(r))-h^2}} = 2h\int_{r_1}^{r_2} \frac{du}{\sqrt{2E-2U(\frac{1}{u})-h^2u^2}}$$

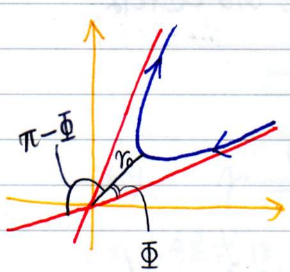
だけ変化する。ただし、$u=\frac{1}{r}$ …………⑧

Φの値が2πの有理数倍であるときには、軌道は閉曲線となる。

次に、質点が無限遠から$r=r_0$まで近づいて再び離れていくような運動で、φは全体で、

$$\Phi = 2h\int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r\sqrt{2r^2(E-U(r))-h^2}} = 2h\int_0^{u} \frac{du}{\sqrt{2E-2U(\frac{1}{u})-h^2u^2}}$$

だけ変化する。従って質点の運動方向の変化は、 ………⑨



$$\theta = |\pi - \Phi| \quad ………⑩$$