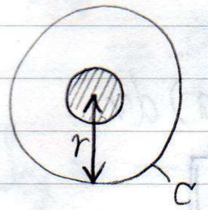
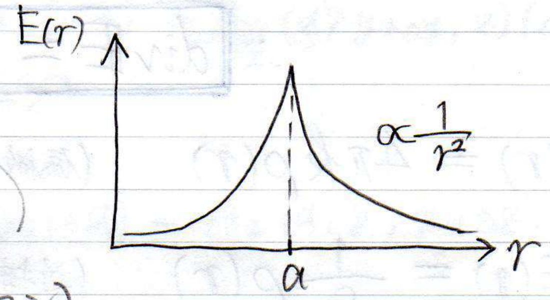
(ii) $r > a$



$$4\pi r^2 \cdot E(r) = 4\pi k \times Q$$

$$\therefore E(r) = k\frac{Q}{r^2}$$

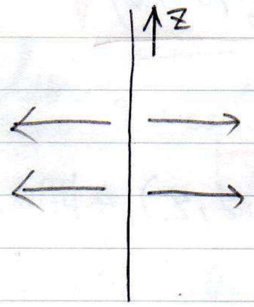


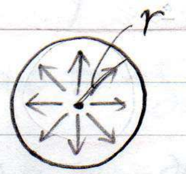
Q：一定，$a \to 0 \Rightarrow$ 点電荷

$$E(r) = k\frac{Q}{r^2} \quad \text{(クーロン)}$$

クーロンの法則 $\rightleftarrows$ ガウスの法則
(等価)

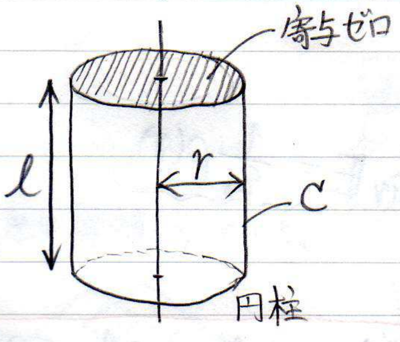
(例2) 一様に帯電する無限に長い直線





- 電場は放射状
- z成分はゼロ
- rだけの関数

σ：線電荷密度



$$\therefore \int E \cdot dS = (2\pi r \times l) \times E(r)$$

$$\Vert$$

$$4\pi k \times (\sigma \times l)$$

$$\therefore E(r) = \frac{4\pi k \sigma l}{2\pi r l} = 2\sigma k \frac{1}{r}$$

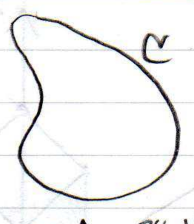
- ガウスの法則の近接作用的表現

ガウスの定理 (数学の定理)

$$\int_{C上} A \cdot dS = \int_{C内} (\mathrm{div} A)\, dv$$

(任意の)閉曲面　表面積分　体積成分

$$A = (A_x, A_y, A_z)$$



ただし、$\mathrm{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$：ベクトル場Aの発散 (divergence)

$$\therefore \int_{C上} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = 4\pi k\cdot Q = 4\pi k\int_{C内}\rho(r)\,dv$$

$$\parallel$$

$$\int_{C内}(\mathrm{div}\,\mathbb{E})\,dv$$

$$\therefore \int_{C内}(\mathrm{div}\,\mathbb{E})\,dv = 4\pi k\int_{C内}\rho(r)\,dv$$

$$\therefore \boxed{\mathrm{div}\,\mathbb{E} = 4\pi k\,\rho(r)}$$

各点 $\mathrm{div}\,\mathbb{E}(r) = 4\pi k\,\rho(r)$ （偏微分方程式）

(MKSA)

$\mathrm{div}\,\mathbb{E}(r) = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r)$ （近接作用的）

ガウスの法則

積分系（遠隔作用的） $\int_{C上} \mathbb{E}\cdot d\mathbb{S} = 4\pi k \times$ (C内の全電気量)

微分系（近接作用的） $\mathrm{div}\,\mathbb{E} = 4\pi k\,\rho(r)$ $\left(\overset{\text{MKSA}}{=} \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r)\right)$

∘ **divergence の基本**

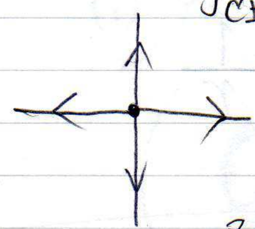
Gauss's theorem で、"任意の曲面"を、今考えている点(x,y,z)を囲む。
微小な曲面C（囲まれている部分の体積v）と考える。

$$\therefore \int_{C内} \mathrm{div}\,\mathbb{A}\,dv \cong (\mathrm{div}\,\mathbb{A})\times v$$

この時、ガウスの定理は、

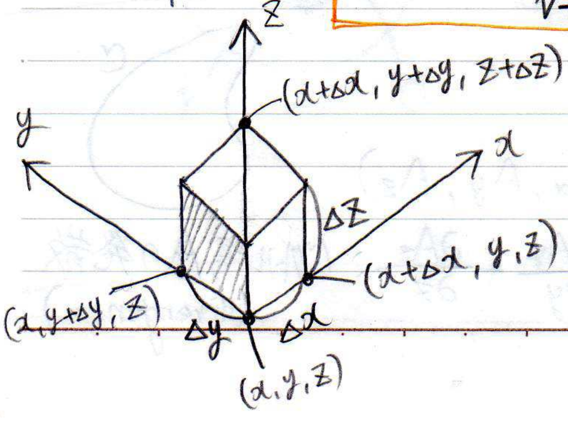
$$\int_{C上} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S} = (\mathrm{div}\,\mathbb{A})\times v$$

$\mathrm{div}\,\mathbb{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho(r)$



$$\therefore \mathrm{div}\,\mathbb{A} = \frac{1}{v}\int_{C上} \mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\mathbb{A} = \lim_{v\to 0}\frac{1}{v}\int_{C上} \mathbb{A}\,d\mathbb{S}} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{div}\,\mathbb{A} \equiv \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$



$$\mathbb{A} = (A_x, A_y, A_z)$$

x方向の2つの面からの寄与

$$|\mathbb{A}\cdot d\mathbb{S}| = A_x(\Delta y)\cdot(\Delta z)$$