

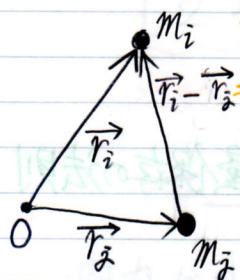
# 第11回 力学A①

Date H22. 6. 29 No. ①

## 第3章 質点系及び剛体の力学

### 20. 質点系力学の基礎

#### 外力, 内力



2つの質点の相互作用は、互いの質点を結ぶ直線に沿って働き、大きさは等しく向きは反対である。

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0, \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \dots \dots \textcircled{1}$$

( $\vec{F}_{ij}$  は質点  $m_i$  に  $m_j$  が及ぼす力)

#### (i) 運動量に関する定理

系外から働く外力を  $\vec{F}_i$  とすれば、運動方程式は、

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad \dots \dots \textcircled{2}$$

$$\therefore \sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

$$\sum_{i < j} (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\therefore \sum_i m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum_i \vec{F}_i$$

$\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$  : 質点系の運動量

は、

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i \quad \dots \dots \textcircled{3}$$

質点系の重心  $\vec{r}_0$

$$M \vec{r}_0 = \sum m_i \vec{r}_i \quad (M = \sum m_i) \quad \dots \dots \dots \textcircled{4}$$

ゆえに ③ より

$$M \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} = \sum \vec{F}_i \quad \dots \dots \dots \textcircled{5}$$

$\vec{F}_i = 0$  のとき、 $\vec{P} = M \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \text{一定} \dots$  運動量保存の法則

(ii) 角運動量に関する定理

$\sum_i \vec{r}_i \times$  ② より

$$\sum_i \vec{r}_i \times \left( m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \right) = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \sum_{i \neq j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

$$\sum \frac{d}{dt} \left( \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \right)$$

$$\left( \because \sum \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times \frac{d\vec{r}_i}{dt}) = \sum \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \frac{d\vec{r}_i}{dt} + \sum \vec{r}_i \times \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} \right) = \sum_{i < j} (\vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ji})$$

$$= \sum_{i < j} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0 \quad (\because \textcircled{1})$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} : \text{質点系の角運動量}$$

とすれば

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \quad \dots \dots \dots \textcircled{6}$$

外力が作用しない質点系では

その角運動量が時間に対して不変である。

角運動量  
保存則