力学A(下村先生)期末試験過去問(2007年)
解答・解説

5月19日UP

★はじめに

　このプリントは基本的に鬱陶しいぐらいに(みんな分かっていそうなことまで)書いたつもりですので力学が得意な人や授業をまじめに聞いていた人には役立たないでしょう。

　また、今村(テの方)個人が作成したものですので、間違っている可能性が大いにあります。間違いや疑問点を見つけたら教えて下さい。よろしくお願いします。

★過去問について

　下村先生の力学Aの過去問は2007年度のものしか見つかりませんでした。他の年度の過去問を見つけた人がいたらUPしてください。

★使った記号について

　ベクトルは太文字にして上に→をつけました。スカラーは基本細字にしています。また、ドットは時間微分を表しています。grad,div,rotはそれぞれ勾配、発散、回転を表します（各演算子については第五回授業H22.5.18を参照のこと）。$\vec{\boldsymbol{i}}$、$\vec{\boldsymbol{j}}$はそれぞれx軸、y軸方向の単位ベクトルです。他に分からない記号があれば遠慮なく聞いてください。独りよがりな使い方をしているかもしれませんので。

★このプリントの構成について

　各問題ごとに、問題文、[解答]、[解説]、[注意]からなります。

　[解答]は丁寧めに書いた答えです。

　[解説]・[注意]に大きな違いはないですが [解説]の方が問題に直接関係があり、[注意]は時によっては余談を書いています。

★第4問・第5問について

　第4問・第5問で問われている剛体の運動についてはまだ授業で取り扱われていないので、最後のページで簡単に解説しています。どうぞご覧ください。

★こんな早い時期に過去問の解答を作った理由

　早い時期に作っておけば、このプリントの感想をみんなから聞いて、これから作るかもしれないシケプリ(必要ないかもしれませんね…)を作るときの参考にできるかもしれないと考えました。

　ですから、できるだけ感想を聞かせて下さい。

　　(例)こんなプリントなら作らない方がマシだ

　　(例)何をやっているのか分かりにくい

　　(例)もっと数学的に厳密に説明しろ

　　(例)座標変換/保存力/剛体の運動/解析力学 etc(何かの topic)についてプリントを作った方がいい

など、どのような意見でも結構ですので、もしあったら、今村(テの方)までよろしくお願いします。

第 1 問

2 次元曲座標(r,θ)の基本(単位)ベクトル$\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta}$を用いて速度$\vec{v}$,加速度$\vec{a}$を

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt} = v_r\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}} + v_\theta\overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}}$$

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \ddot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \frac{d^2\vec{\boldsymbol{r}}}{dt^2} = a_r\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}} + a_\theta\overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}}$$

と書いたときの$v_r, v_\theta, a_r, a_\theta$を$r,\theta$によって表現せよ。

[解答]

$$\begin{cases}\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}} = \cos\theta\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \sin\theta\,\vec{\boldsymbol{\jmath}} \\ \overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}} = -\sin\theta\,\vec{\boldsymbol{\imath}} + \cos\theta\,\vec{\boldsymbol{\jmath}}\end{cases} \#1 \qquad \begin{cases}x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\end{cases} \#2$$

から、

$$\begin{cases}\vec{\boldsymbol{\imath}} = \cos\theta\,\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}} - \sin\theta\,\overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}} \\ \vec{\boldsymbol{\jmath}} = \sin\theta\,\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}} + \cos\theta\,\overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}}\end{cases} \#3 \quad \begin{cases}\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta\end{cases} \#4 \quad \begin{cases}\ddot{x} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\cos\theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\sin\theta \\ \ddot{y} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\sin\theta + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos\theta\end{cases} \#5$$

が得られるので

$$\begin{cases}v_r = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta = \dot{r} \\ v_\theta = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta = r\dot{\theta} \\ a_r = \ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = -\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\end{cases}$$

となる。

[解説]

授業ノート(第三回 H22.4.27 第二頁)とは敢えて違う方法でしています。

違いは授業では基本ベクトルの時間微分を求めて$\vec{\boldsymbol{r}} = r\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}}$を用いて$\dot{\vec{\boldsymbol{r}}},\ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}$を順に微分して求めたのに対し、ここでは位置の直角座標成分x,yの時間微分(#4、#5)を求め、それを座標間の単位ベクトルの変換則(#3)に代入しています。授業でやったやり方の方が計算は楽かもしれませんが、ここでやったやり方は単純なので考え方としては分かりやすいと思う人もいるかもしれませんので載せました。

また、#3～#5 から直接答えを出すのに抵抗を感じる人は

「#3 より任意のベクトル

$$\vec{\boldsymbol{A}} = a_x\vec{\boldsymbol{\imath}} + a_y\vec{\boldsymbol{\jmath}} = a_r\overrightarrow{\boldsymbol{e_r}} + a_\theta\overrightarrow{\boldsymbol{e_\theta}}$$

に対して

$$\begin{cases}a_r = \cos\theta\, a_x + \sin\theta\, a_y \\ a_\theta = -\sin\theta\, a_x + \cos\theta\, a_y\end{cases} \#6$$

が成り立つから」という文章を#5 の後に挿入して下さい。

[注意]

#1 と#6 は似ていますね。これは極座標が特殊な座標系(直交曲線座標といわれる)だからです。

三次元の場合の極座標も円柱座標も、直交曲線座標であり、類似する関係があります。

これら二つの座標系に関しても、同じ問題を解いておくと良いと思います。

第 2 問

平面内で運動する質点に働く力$\vec{\boldsymbol{f}}$の直角座標成分が$f_x = axy, f_y = 2ax^2/2$(は定数)と書けたとする。$\vec{\boldsymbol{f}}$が保存力であることを示しポテンシャルを求めよ。

[解答]

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} = ax - ax = 0$$

より$\vec{\boldsymbol{f}}$は保存力である。
またポテンシャルUは

$$\vec{\boldsymbol{f}} + grad\,U = \vec{\boldsymbol{0}}$$

となるスカラー場であるから、

$$U = -\frac{ax^2y}{2} + C\ (C\text{は定数})$$

となる。
　原点を基準にとれば

$$U = -\frac{ax^2y}{2}$$

である。
[解説]
　これは第五回の授業(H22.5.18)で全く同じ力について扱っていました。
[注意]
　力が三次元の場合でもできるようにしておいてください。
　つまり、
ポテンシャルと力の関係

$$\vec{\boldsymbol{f}} + grad\,U = \vec{\boldsymbol{0}}$$

と、ポテンシャルの存在の判定条件

$$rot\vec{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{0}}$$

をしっかり押さえておく必要があるということです。

――――――――――――――――――――――――――以下余談――――――――――――――――――――――――――
　下の式が上の式の必要条件であるのは明らかですが、十分条件であることは自明ではありません。
　興味のある人はたとえば「解析概論」(高木貞治著　岩波書店)の「§104. 完全微分の条件」の定理 80. などを見て下さい。まあ、どんなベクトル解析の本にでも載っているとは思いますが……
　実は、力の場が複雑な領域上に定義されているときはこの同値性は成り立たないことがあります。この同値性は単連結(任意の閉じた曲線が連続的に変化して一点に収束できるという性質)な領域上に定義されている力の場に対してのみ適用できます。
　もちろん、この定理の証明が力学 A の試験で問われることはない(多分)のでご心配なく…
――――――――――――――――――――――――――余談終了――――――――――――――――――――――――――

第 3 問

水平な床の上に長さl、質量Mの一様な板を置く。板の一端に立っている質量mの人が他端まで歩く時、板の動く距離を求めよ。ただし、板と床の間には摩擦がないものとする。

[解答]

一次元の座標を導入する。

最初に人が立っている点を原点$x = 0$にとり、板の他端が初めにある点を$x = l$とする。

人と板にかかる水平方向の力は、人が板に及ぼす摩擦力と板が人に及ぼす摩擦力のみであり、作用反作用の原理よりこれら 2 つのちからは等大逆向きであるから合力はゼロである。

よって人と板全体の重心の位置は変わらない。

最初の人と板全体の重心の位置x_Gは,板の重心が$x_M = \frac{l}{2}$で人の重心が$x_m = 0$であることから、

$$x_G = \frac{Mx_M + mx_m}{M + m} = \frac{l}{2}\frac{M}{M + m}$$

最初に人が板の左端にいたのが最終的には板の右端にいる状態になるのだから、最初の状態と最後の状態は重心に関して対称的な状態であると考えられる。

よって板の動いた距離は、人と板全体の重心と、板のみの重心の距離の 2 倍に等しく、

$$2 \times \left| \frac{l}{2}\frac{M}{M + m} - \frac{l}{2} \right| = \frac{m}{M + m} l$$

となる。

[解説]

すごく簡単ですね。計算間違いに気をつけるだけです。

[注意]

$M \gg m$のとき 0、$m \gg M$のときlになることを確かめておきましょう。

こうならなければ、計算ミスをしています。

あまりにも単純すぎるので、間違っていないか不安です。間違っていたら教えて下さい。

第 4 問

半径a、質量Mの一様な球に、重さが無視できる糸をつけて振子を作る。支点から球の重心までの距離をlとする。この振子の微小振動の周期を求めよ。ただし重力加速度をgとする。

[解答]

支点を通り、振子の通る平面に垂直な直線の回りの慣性モーメントIは

$$I = Ml^2 + \frac{2}{5}Ma^2$$

となるので、支点から鉛直に下した半直線と振子の糸の角度をθとすると、

運動方程式は

$$I\ddot{\theta} = -lMg\sin\theta$$

微小振動であるから$sin\,\theta \cong \theta$と近似できるので$\ddot{\theta} = \dfrac{-gl}{l^2 + \frac{2}{5}a^2}\theta$となる。

よって周期$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l^2 + \frac{2}{5}a^2}{gl}}$となる。

[解説]

[解答]では半径a質量Mの球の中心をとおる直線の回りの慣性モーメントが$\frac{2}{5}Ma^2$になることや「平行軸の定理」を使っています。**これらの証明や、慣性モーメントなどの剛体の運動についての基礎概念に関しては第五問の次のページで解説していますのでそこを見て下さい。**

[注意]

～$sin\,\theta \cong \theta$と近似してしまうのが嫌な人のために～　「極限」としての周期

微分方程式$I\ddot{\theta} = -lMg\,sin\,\theta$から$\dfrac{d}{dt}\left\{\dfrac{I}{2}\dot{\theta}^2 - lMg\,cos\,\theta\right\} = I\ddot{\theta}\dot{\theta} + lMg\dot{\theta}\,sin\,\theta = 0$

となり、$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\omega_0{}^2 - \dfrac{2lMg}{I}(1 - cos\,\theta)}$と求まるので,($\omega_0$は$\theta = 0$での角速度)

周期$T = 2\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha}\dfrac{d\theta}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{2lMg}{I}(1 - cos\,\theta)}}$となる。$\left(\omega_0{}^2 = \dfrac{2lMg}{I}(1 - cos\,\alpha)\right)$

$$T = 2\int_{-\frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{I}{lMg}}}^{\frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{I}{lMg}}}\frac{\frac{2}{\sqrt{1-s^2}}ds}{\sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{4lMg}{I}s^2}} = 2\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{\frac{I}{lMg}}\omega_0 du}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0{}^2 I}{4lMg}u^2}\sqrt{\omega_0{}^2 - \omega_0{}^2u^2}} = 2\sqrt{\frac{I}{lMg}}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0{}^2 I}{4lMg}u^2}\sqrt{1-u^2}}$$

微小振動ということはαが十分小さい、即ちω_0が十分小さいということである。

よって$T \to 2\pi\sqrt{\frac{I}{lMg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2+2a^2/5}{gl}}$　$(\omega_0 \to 0)$。

$\left(\because \int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pi\right.$より$\pi < \int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-\frac{\omega_0{}^2 I}{4lMg}u^2}\sqrt{1-u^2}} < \pi\sqrt{1 - \frac{\omega_0{}^2 I}{4lMg}}$で$\left.\pi\sqrt{1 - \frac{\omega_0{}^2 I}{4lMg}} \to \pi \quad (\omega_0 \to 0)\right)$

第5問

水平から角αだけ傾いた斜面に円柱を置き、静かにはなす。その時を時刻の原点に選び、その位置から斜面に沿って下向きに測った距離をxとする。円柱はすべらずに転がり落ちるものとし、次の2種類の円柱についてとの関係を求めよ。ただし重力加速度をgとする。

(1)中が詰まった一様な密度の円柱

(2)中が空で一様な面密度の外面をもつ円柱

[解答]

以下、円柱の質量をM、半径をaとする。

(1)中が詰まった一様な密度の円柱、(2)中が空で一様な面密度の外面をもつ円柱の中心軸の回りの慣性モーメントはそれぞれ(1)$Ma^2/2$、(2)$Ma^2(*)$である。

斜面が円柱に及ぼす摩擦力の大きさをFとすると、

並進運動の運動方程式は

$$M\ddot{x} = Mg\,sin\,\alpha - F \quad \#1$$

中心軸回りの運動方程式は

$$I\dot{\omega} = aF \quad \left(\omega\text{は中心軸回りの角速度}\right) \quad \#2$$

となる。(Iは慣性モーメント)

ここで円柱が滑らないことから$\dot{x} = a\omega$なので、$(*)$を#2に代入してFを求めそれを#1に代入すると(1)では$\ddot{x} = 2g\,sin\,\alpha/3$、(2)では$\ddot{x} = g\,sin\,\alpha/2$となる。

速度$\dot{x}$ は上の$\ddot{x}$ を時間で積分して(初期条件;$[\dot{x}]_{t=0} = 0$)、(1)では$\dot{x} = 2tg\,sin\,\alpha/3$、(2)では$\dot{x} = tg\,sin\,\alpha/2$となる。

位置xは上の$\dot{x}$を時間で積分すると、(初期条件;$[x]_{t=0} = 0$)

(1)では

$$x = \frac{g\sin\alpha}{3}t^2$$

(2)では

$$x = \frac{g\sin\alpha}{4}t^2$$

となる。

[解説]

慣性モーメントの違いが運動に変化をもたらすことがポイント。

大まかにいえば中心に重みが詰まっているほど落ちるのは速く、縁に重みが偏っているほど落ちるのは遅くなります。

[注意]

速度は円柱の質量や半径に依存しないことに注意してください。だから、問題で与えられていないのです。

剛体の運動について

剛体に関して四つの基本的な量を以下のように定義する。
　剛体の運動量

$$\vec{\boldsymbol{P}} \equiv \int \vec{\boldsymbol{v}} dm \ (dm\text{は質量素})$$

　剛体の(重心の回りの)角運動量

$$\vec{\boldsymbol{L}} \equiv \int (\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}})\, dm \quad (\vec{\boldsymbol{r}}\text{は重心に対する各点の位置})$$

　力

$$\vec{\boldsymbol{F}} \equiv \int d\vec{\boldsymbol{f}}$$

　力のモーメント

$$\vec{\boldsymbol{N}} \equiv \int \vec{\boldsymbol{r}} \times d\vec{\boldsymbol{f}}$$

すると$\dot{\vec{\boldsymbol{v}}} = \vec{\boldsymbol{f}}$(Newton の第二法則)から二つの方程式が導かれる。

$$\dot{\vec{\boldsymbol{P}}} = \vec{\boldsymbol{F}}$$

$$\dot{\vec{\boldsymbol{L}}} = \vec{\boldsymbol{N}}$$

これによって剛体の運動が記述される。
さて、

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{v_0}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}} \quad (\overrightarrow{\boldsymbol{v_0}}\text{は重心の速度})$$

であるから、

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \int (\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{v}})\, dm = \int \left(\vec{\boldsymbol{r}} \times (\overrightarrow{\boldsymbol{v_0}} + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}})\right) dm = \int \left(\vec{\boldsymbol{r}} \times (\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}})\right) dm$$

ここで慣性テンソルを下式で定義する。

$$\begin{cases} I_{xx} = \int (y^2 + z^2) dm & I_{yz} = I_{zy} = -\int yzdm \\ I_{yy} = \int (z^2 + x^2) dm & I_{zx} = I_{xz} = -\int zxdm \\ I_{zz} = \int (x^2 + y^2) dm & I_{xy} = I_{yx} = -\int xydm \end{cases}$$

すると上の角運動量の定義式から計算すると、

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \vec{\boldsymbol{\omega}}$$

となる。
　慣性テンソルの 9 つの成分のうちI_{xx}, I_{yy}, I_{zz}を慣性モーメントといい、残りの 6 つを慣性乗積という。慣性乗積が全てゼロになるように直交基底をとることが可能でそのときの軸を慣性主軸という。

問題 4、問題 5 に戻ると、これらの問題は二次元の運動であり、したがって角速度ベクトルがつねに同じ方向を向いている。そのおかげで、慣性テンソルが時間変化せず、問題 4・5 では一つの成分だけ考えれば十分だったのである。

つまり「同じ方向」というのをx軸と考えれば

$$\vec{\boldsymbol{L}} = \begin{pmatrix} I_{xx}\omega_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\int \vec{\boldsymbol{r}} \times d\vec{\boldsymbol{f}} = \vec{\boldsymbol{N}} = \dot{\vec{\boldsymbol{L}}} = \begin{pmatrix} I_{xx}\dot{\omega}_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となって、x軸のまわりの慣性モーメントと外力さえ分かれば、角加速度が求められたのである。

★慣性モーメントの計算：出てきたのは球と円柱

〈球〉ρは密度とする。すなわち、$\rho \times \frac{4\pi}{3} r^3 = M$

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 2\rho\sqrt{a^2 - r^2} r dr d\theta = \frac{2}{5} M a^2$$

〈円柱〉円柱はどの断面も同じなので二次元的に考える。

〈円柱 1〉中まで詰まって一様

ρは一定の断面積あたりの重さとする。即ち、$\rho \times \pi r^2 = M$

$$I = \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 2\rho r dr d\theta = \frac{1}{2} M a^2$$

〈円柱 2〉側面だけ

どの点も中心軸から距離aにあるので

$$I = Ma^2$$

※上の計算で極座標における積分を用いている。

★平行軸の定理

質量Mの剛体の重心を通る、ある軸のまわりの慣性モーメントをI_0とすると、この軸と平行で距離l離れた軸の回りの慣性モーメントIは$Ml^2 + I_0$である。

[略証]

$$I = \iint \rho \left|\vec{l} + \vec{r}\right|^2 dS \text{ であり}$$

$$M = \iint \rho dS \text{、} 0 = \iint \rho \vec{r} dS \text{、} I_0 = \iint \rho |\vec{r}|^2 dS$$

を使って初めの式を展開すれば定理を得る。