振動・波動論　過去問等解説

1　基本

振動波動について、まず基本的なことを簡単に確認しておきます。

1.1　基本的な振動解

まず、単振動の式（微分方程式）

$$\ddot{x} = -\omega^2 x$$

が与えられたとき、$x(t)$ 一般解は、二つの未定常数を使って、

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

または

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

と表せました。①では A とα、②では A と B が未定常数です。また、①と②が同値だと言うことは、②を合成して新しく定数を置き換えれば示せます。

また、速度 $\dot{x}$に比例する項が入った場合は、運動方程式が

$$m\ddot{x} = -kx - 2m\gamma\dot{x}$$

のようになって、微分方程式の形は

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

のようになります。

この場合は、$x(t)$ が一通りには表せなく、γとω の大小で振動の形が変わります。これについては次の項で説明します。

さらに、③の式に外力 $f(t)$ 等が加わった場合は、強制振動と呼ばれます。

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f(t) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{④}$$

この場合は、$f(t) = f_1(t)$ の時に④を満たすある関数 $x_1(t)$ と、$f_2(t)$ の時に④を満たす満たす関数 $x_2(t)$ を持ってきたとき、$x_1(t)$ と $x_2(t)$ を線形結合した解

$$x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

が

$$f_3(t) = af_1(t) + bf_2(t)$$

であるときの解になることを用いて[1]、

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

を満たす解 $x_1(t)$ と

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega^2 x = f(t)$$

を満たす解（一般解でなくて良い）$x_2(t)$ を用いて、一般解は

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

と表せることを使って解きます。詳しくは次の次の項で扱います。

[1] $f_1(t) = 0$、$f_2(t) = f(t)$ として考えます。

1.2　抵抗力がある場合の振動

速度（変位の一階微分）に比例する抵抗力が入った場合の振動を考えます。

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑤$$

このような**線形の常微分方程式**は、解の形を

$$x(t) = ce^{\lambda t}$$

と仮定して λを求めることで必ず解くことが出来る、ということが知られています。ということでそれに倣って $x(t)$ に代入し、整理すると次のようになります。

$$\left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right) x(t) = 0$$

これを満たすには、$x(t) \equiv 0$ または$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 \equiv 0$ であればいいのですが、$x(t) \equiv 0$ の方は「変位が起こらない」という意味のない式になるので除外します。結局条件式は

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

です。λ を二次方程式の解の公式から求めると

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

となります。こうしてみると、ルートの中が γとω の大小で虚数になるか実数になるかが分かれます。では三通りについて考えてみましょう。

- $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$ のとき（実数）。

  λはある意味問題なく実数で二つ求まって、$\pm$ の $+$ の方をλ_1'、$-$ の方をλ_2'とすれば、

  $$\lambda_1' = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$
  $$\lambda_2' = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

  となりますね。ここでλ_1'とλ_2'はどちらも負になるので、わかりやすいように$\lambda_1 = -\lambda_1'$、$\lambda_2 = -\lambda_2'$としましょう。

  さて、二階の微分方程式は二つの未定常数を用いて一般解を表せればいいので、ここではそれを A と B として、

  $$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t} \\ &= \frac{A}{e^{\lambda_1 t}} + \frac{B}{e^{\lambda_2 t}} \end{aligned}$$

  とすれば一般解が求まったことになります。線形の微分方程式なので、λ_1とλ_2に対するそれぞれの解を線形結合しても解になることを使いました。

  これは指数関数的に減少する関数で、**過減衰**と呼ばれます。双曲線関数

  $$\cosh\lambda t = \frac{e^{\lambda t} + e^{-\lambda t}}{2} \qquad \sinh\lambda t = \frac{e^{\lambda t} - e^{-\lambda t}}{2}$$

  を使えば、これも二つの未定常数を使って変形できます。$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$ だったので、

  $$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{\left(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} + Be^{\left(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} \\ &= e^{\gamma t}\cdot\left(Ae^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}t}\right) \\ &= e^{\gamma t}\cdot\left(Ae^{\nu t} + Be^{-\nu t}\right) && \left(\text{ただし}\nu \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right) \\ &= e^{\gamma t}\cdot\left(\alpha\frac{e^{\nu t} + e^{-\nu t}}{2} + \beta\frac{e^{\nu t} - e^{-\nu t}}{2}\right) && (\text{ただし}\alpha = A + B,\ \beta = A - B) \\ &= e^{\gamma t}\left(\alpha\cosh\nu t + \beta\sinh\nu t\right) \end{aligned}$$

  となります。

- $\gamma^2-\omega_0^2=0$ のとき（重解)。

  この場合は先ほどの場合の極限と見なすことができます。でもこれは極限計算が面倒そうなので省略。普通に解きます。

  まず、λ は一つだけ求まります。

$$\lambda=-\gamma\big(=-\omega_0\big)$$

  しかしこれだけでは解が足りないので、$\gamma=\omega_0$、$\lambda=-\omega_0$を⑤に代入して、さらにこれまでは定数とみなしていた e の係数 c を、$c=c(t)$ と変数のように考えて変形します[2]。

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\left(ce^{-\omega_0 t}\right)+2\omega_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ce^{-\omega_0 t}\right)+\omega_0^2ce^{-\omega_0 t}=0$$

  左辺を計算するに当たって

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(ce^{-\omega_0 t}\right) &= \dot{c}e^{-\omega_0 t}-\omega_0ce^{-\omega_0 t}\\ &= \big(\dot{c}-\omega_0c\big)e^{-\omega_0 t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\big(\dot{c}-\omega_0c\big)e^{-\omega_0 t}\right\}\\ &= \big(\ddot{c}-\omega_0\dot{c}\big)e^{-\omega_0 t}-\omega_0\big(\dot{c}-\omega_0c\big)e^{-\omega_0 t}\\ &= \big(\ddot{c}-2\omega_0\dot{c}+\omega_0^2c\big)e^{-\omega_0 t}\end{aligned}$$

  を使うと、

$$\begin{aligned}\text{（左辺）} &= \big(\ddot{c}-2\omega_0\dot{c}+\omega_0^2c\big)e^{-\omega_0 t}+2\omega_0\big(\dot{c}-\omega_0c\big)e^{-\omega_0 t}+\omega_0^2ce^{-\omega_0 t}\\ &= \ddot{c}e^{-\omega_0 t}\end{aligned}$$

  となり、$\ddot{c}=0$ が新しい条件となります。これは二つの未定常数 a,b を用いて

$$c=at+b$$

  と t についての 一次式で表すことで解消できます。以上より一般解は

$$(at+b)e^{-\omega_0 t}$$

  となります。

- $\gamma^2-\omega_0^2<0$ のとき（虚数)。この場合、λは、虚数単位の i を用いて

$$\lambda=\gamma\pm\mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}$$

  と表せます。これも $\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}=\phi$とでも置けば、線形性より、未定常数 $A=a_0+a_1\mathrm{i}$、$B=b_0+b_1\mathrm{i}$ の二つを用いて

$$x(t)=e^{-\gamma t}\left(Ae^{\mathrm{i}\phi t}+Be^{-\mathrm{i}\phi t}\right)$$

  と一般解が求まります。さらにオイラーの公式

$$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$$

  を使って三角関数にばらすと

$$x(t)=e^{-\gamma t}\left(A(\cos\phi t+i\sin\phi t)+B(\cos\phi t-\mathrm{i}\sin\phi t)\right) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑥$$

  と表せます。

[2] これを「定数変化法」と呼びます。

さて、ここで $x(t)$ は現実世界の運動なので、虚数が入るわけにはいきません。そこで、⑥式において虚数部分が 0 になるように未定常数つまり a_0、a_1、b_0、b_1を定める必要があります[3]。

では三角関数の面倒な部分だけを考えるために $\dfrac{x(t)}{e^{-\gamma t}}$ を a_0、a_1、b_0、b_1 を使って変形します[4]。

$$\begin{aligned}\frac{x(t)}{e^{-\gamma t}} &= (a_0+a_1\mathrm{i})\cos\phi t+\mathrm{i}(a_0+a_1\mathrm{i})\sin\phi t+(b_0+b_1\mathrm{i})\cos\phi t-\mathrm{i}(b_0+b_1\mathrm{i})\sin\phi t\\ &= \big(a_0\cos\phi t+b_0\cos\phi t-a_1\sin\phi t+b_1\sin\phi t\big)+\mathrm{i}\big(a_1\cos\phi t+b_1\cos\phi t+a_1\sin\phi t-b_1\sin\phi t\big)\end{aligned}$$

よって条件は

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\frac{x(t)}{e^{-\gamma t}}\right) &= a_1\cos\phi t+b_1\cos\phi t+a_1\sin\phi t-b_1\sin\phi t\\ &= (a_1+b_1)\cos\phi t+(a_0-b_0)\sin\phi t=0\end{aligned}$$

となり、

$$a_1+b_1=0 \qquad\qquad a_0-b_0=0$$

が条件です。これで未定常数が二つに定まりました。

$$a\equiv a_0=b_0$$

$$b\equiv b_1=-a_1$$

と新しく置くと、$x(t)$ は

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-\gamma t}\big(2a\cos\phi t+2b\sin\phi t\big)\\ &= e^{-\gamma t}2\sqrt{a^2+b^2}\cos(\phi t+\alpha) && \text{（三角関数の合成）}\\ &= Ae^{-\gamma t}\cos(\phi t+\alpha) && (A\equiv 2\sqrt{a^2+b^2})\end{aligned}$$

とやはり二つの未定常数 A、α で表せます。

この関数は、周期 ϕ で振動しながら指数関数的に減少して 0 に収束していきます。いわゆる**減衰振動**です。

1.3 強制振動

速度（変位の一階微分）に比例する抵抗力が入った場合の振動に対して、外力 $f(t)$ が加わった場合を考えます。

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=f(t) \qquad \cdots\cdots ⑦$$

さて、これをどう解こうかという話です。これは最初の方でうるさく言いましたが、まず

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

となる解を 1 つ求め、さらに⑦を満たす解**（特殊解）**を何でも良いので適当に見つけて、足し合わせれば答えになるのでした。

そして幸運なことに、初めの解は 1.2 で求めてあります。場合が三つに分かれていますがそんなのはどうでも良いのです。ここではその特殊解を求めることをします。

まず外力です。ここでは一般に $f(t)$ と置いていますが、これは $f\cos\omega t$ と置いて、振動する外力だと想定して構いません。なぜなら、後にやりますがフーリエ変換で任意の関数 $f(t)$ は、無限個の基準振動を足し合わせて

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n\cos(\omega_n t+\alpha_n)$$

[3]このままだと未定常数が 4 つあるように見えますが、この条件を掛けることで常数は 2 つに制限されるのです。
[4]ただ $e^{-\gamma t}$を 何度も書くのがうるさいので左辺にやってしまっただけです。

と合成することができるので、振動する場合を求めておけば十分です。

なので、⑦は

$$\ddot{x}+2\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=f\cos\omega t$$

と書き換えておきます。

さて、解を求めると言いましたが微分方程式は半ば暗記ゲーのようなもので、天から降ってくるように解法が存在するのです。ここでは

系はそのうち外力 $f(t)$ の振動数 ω で振動する（だろう）

という考えのもと、

$$x=A\cos\omega t$$

と置いてみます。ただし、後の計算がしやすいように

$$\begin{aligned} z &= A\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t \\ &= Ae^{\mathrm{i}\omega t} \end{aligned}$$

と複素数 $z(t)$ で拡張しておき、最終的に実部 $x(t)$ を取ってくれれば解になるという企みから、ここでは $z(t)=Ae^{\mathrm{i}\omega t}$を代入します。さらに外力の方も、実部を取れば $f\cos\omega t$ が出てくるように

$$fe^{\mathrm{i}\omega t}=f\cos\omega t+\mathrm{i}\sin\omega t$$

と置き、方程式

$$\ddot{z}+2\gamma\dot{z}+\omega_0^2z=fe^{\mathrm{i}\omega t} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑧$$

を考えます。

⑧に $z(t)=Ae^{\mathrm{i}\omega t}$ を代入すると

$$\big(-\omega^2+2\mathrm{i}\gamma\omega+\omega_0^2\big)Ae^{\mathrm{i}\omega t}=fe^{\mathrm{i}\omega t}$$

となり、$e^{\mathrm{i}\omega t}\equiv 0$ とならないことから

$$A=\frac{f}{\omega_0^2-\omega^2+2\mathrm{i}\gamma\omega}$$

と求まりました。つまり

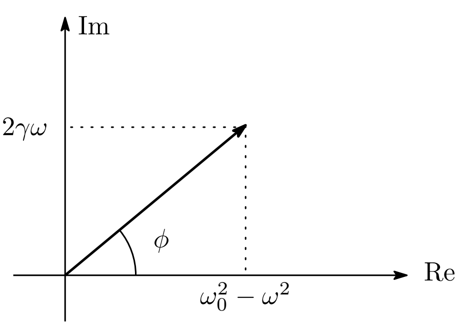
$$z(t)=\frac{f}{\omega_0^2-\omega^2+2\mathrm{i}\gamma\omega}e^{\mathrm{i}\omega t}$$

とあっさり求まったということです。ではおもむろに $x(t)$ を求めようという話ですが、これが少し面倒です。

まず、求まった A を $Ce^{\mathrm{i}\alpha}$の形で複素数表示します。

$$\begin{aligned} \omega_0^2-\omega^2+2\mathrm{i}\gamma\omega &= \sqrt{\big(\omega_0^2-\omega^2\big)^2+(2\gamma\omega)^2}\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{\sqrt{\big(\omega_0^2-\omega^2\big)^2+(2\gamma\omega)^2}}+\mathrm{i}\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{\big(\omega_0^2-\omega^2\big)^2+(2\gamma\omega)^2}}\right) \\ &= \sqrt{\big(\omega_0^2-\omega^2\big)^2+(2\gamma\omega)^2}\,(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi) \\ &= \sqrt{\big(\omega_0^2-\omega^2\big)^2+(2\gamma\omega)^2}\;e^{\mathrm{i}\phi} \end{aligned}$$

と表せることから（ϕは下のような角で、$\tan\phi=\dfrac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$ です）、



$$
\begin{aligned}
z(t) &= \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}\frac{e^{\mathrm{i}\omega t}}{e^{\mathrm{i}\phi}} \\
&= \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}e^{\mathrm{i}(\omega t-\phi)} \\
&= \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}\left(\cos(\omega t-\phi)+\mathrm{i}\sin(\omega t-\phi)\right)
\end{aligned}
$$

と表せました。こうなれば実部 $x(t)$ は簡単にわかって、

$$
x(t)=\frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}\cos(\omega t-\phi)
$$

となります。

また、速度はこれを一階微分すれば良く、

$$
\dot{x}(t)=-\frac{\omega f}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}\sin(\omega t-\phi)
$$

となります。

では、外力の振動数 ω を変えたときに、$x(t)$ の振幅と、位相差 ϕ はどのように変わるかを見てみましょう。感覚としては、「$\omega=\omega_0$ のときになんかすげえ強め合いそう！」くらいには思っていてください。

またここでは、一周期の仕事率平均

$$
\bar{P}=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\cdot\dot{x}(t)\mathrm{d}t
$$

を考えて、外力の仕事の効率がどれほどかを考えます。

- ω がめっちゃ小さいとき。

  まず、

  $$
  \tan\phi=\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}\rightarrow+0
  $$

  となるので、$\phi\rightarrow 0$ です。なので

  $$
  x(t)\fallingdotseq\frac{f}{\omega_0^2}\cos\omega t
  $$

  となります。

  また仕事率は、$\dot{x}(t)\fallingdotseq-\frac{\omega f}{\omega_0^2}\sin\omega t$ となることから、

  $$
  \begin{aligned}
  \bar{P} &= -\frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f\cos\omega t\cdot\frac{\omega f}{\omega_0^2}\sin\omega t\ \mathrm{d}t \\
  &= -\frac{\omega^2 f^2}{4\pi\omega_0^2}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}}\sin 2\omega t\ \mathrm{d}t \\
  &= 0
  \end{aligned}
  $$

  となり、外力の効率は全くありません。ブランコをこぐのに早く漕ぎすぎても意味がないのと同じです。

- ωがめっちゃ大きいとき。

  今度は
$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \to -0$$
  となるので $\phi \to \pi$ です。なので
$$x(t) \fallingdotseq -\frac{f}{\omega^2}\cos\omega t$$
  となって、ωがさらに大きくなると 0 に近づいていきます。仕事率は計算しませんがこれも 0 になります。$\dot{x}(t)$ が $\sin$ になるので見た瞬間わかりますが。

- $\omega = \omega_0$のとき
$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \to \pm\infty$$
  となって、$\phi \to \frac{\pi}{2}$ です。なので
$$x(t) = \frac{f}{2\gamma\omega_0}\sin\omega t$$
  となります。

  仕事率は、$\dot{x}(t) = \dfrac{f}{2\gamma}\cos\omega t$ となることから、
$$\begin{aligned}
\bar{P} &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f\cos\omega t \cdot \frac{f}{2\gamma}\cos\omega t \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega f^2}{4\pi\gamma}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2\omega t \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{\omega f^2}{4\pi\gamma}\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega} \\
&= \frac{\omega f^2}{4\gamma}
\end{aligned}$$
  となります。これだけではわかりませんが、これは $\bar{P}(\omega)$ の 最大値です。

仕事率についてですが、一般には
$$\begin{aligned}
\bar{P} &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f\cos\omega t \cdot \dot{x}(t) \ \mathrm{d}t \\
&= -\frac{\omega^2 f^2}{2\pi\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos\omega t\sin(\omega t-\phi)\ \mathrm{d}t \\
&= -\frac{\omega^2 f^2}{2\pi\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos\omega t(\sin\omega t\cos\phi-\cos\omega t\sin\phi)\ \mathrm{d}t \\
&= -\frac{\omega^2 f^2}{2\pi\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \Big(\frac{1}{2}\cos\phi\sin 2\omega t-\sin\phi\cos^2\omega t\Big) \\
&= -\frac{\omega^2 f^2}{2\pi\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}\ \Big(0-\sin\phi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{\omega}\Big) \\
&= \frac{\omega f^2}{2}\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}}\frac{2\gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}} \\
&= f^2\frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2} \\
&= \frac{f^2}{4\gamma}\frac{1}{1+\left(\frac{\omega_0^2-\omega^2}{2\gamma\omega}\right)^2}
\end{aligned}$$

と非常に厄介ですが計算できて、$\omega = \omega_0$の時に最大値を取ることが示せます。

1.4　基準振動

1.4.1　基準振動とは

ここまでの単純な計算に力を入れすぎたので手早く行きます。

基準振動というのは

系が同じ振動数で振動していること

を指します。モード (mode) と言ったりもします。そしてそのときの振動数を**基準振動数**と言います。そのままですね。

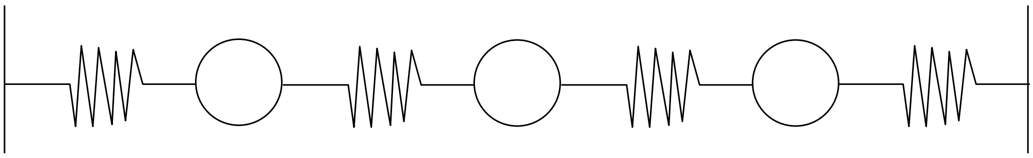
一般に、自由度が N の系[5]に対して、基準振動数も N 個存在することがわかっています。

ではなぜ、そんなに基準振動が偉いのかというと、理由は簡単。

基準振動の足し合わせで、あらゆる振動が記述できるから

です。

例えば、三つのおもりがバネでつながっていて、この系の三つの基準振動 $x_1(t)$、$x_2(t)$、$x_3(t)$ がわかっているとします。



この場合、たとえどんなにめちゃくちゃにこのおもりが振動していても、それは基準振動の足し合わせ

$$x(t) = A_1x_1(t) + A_2x_2(t) + A_3x_3(t)$$

で表現することができるのです。

1.4.2　N 自由度での基準振動

N 個のおもりが、バネ定数が K で等しい N+1 個のバネで、両端の壁から壁へ一直線に並べられているとします。よくある状態です。

運動方程式が

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 &= -Kx_1 + K(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 &= -K(x_2 - x_1) + K(x_3 - x_2) \\ \vdots & \\ m\ddot{x}_{N-1} &= -K(x_{N-1} - x_{N-2}) + K(x_N - x_{N-1}) \\ m\ddot{x}_N &= -K(x_N - x_{N-1}) - Kx_N \end{cases}$$

と表せて、壁の端にもおもりがあると仮定して x_0と x_{N+1}を導入すれば、全ての n について

$$m\ddot{x}_n = Kx_{n-1} - 2Kx_n + Kx_{n+1} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ⑨$$

と書けるという所は納得してもらえると思います。

さて、ここで基準振動数 ωと、n 番目のおもりの変位η_nを求めます。η_nが表すのは、全体でωで振動するのは良いとして、n 番目はどれくらいその振動に関与するか、みたいな感じです。

[5] 独立して動けるものが N 個あるということです。

また、η_nは時間に関係なく、n にだけ依存する値だということも書いておきます。何番目かによって振幅が決まり、後はその振幅で振動数ωの単振動を行うということです。

ここで、例によって $x_n(t)$ の形を決めてしまいます。振幅η_n、振動数ωの単振動解になると決めているので、複素数を使って、

$$x_n = \eta_n e^{\mathrm{i}\omega t}$$

と表しておきます。もちろん後で実部を取ります。これを⑨に代入すると、

$$\left\{-K\eta_{n-1} + (2K - m\omega^2)\eta_n - K\eta_{n+1}\right\} e^{-\omega t} = 0$$

となって

$$-K\eta_{n-1} + (2K - m\omega^2)\eta_n - K\eta_{n+1} = 0$$

が出てきます。

これを解くために、さらに ηを振動解であると見越して最後に実部を取るという手を再び使いましょう、

$$\eta_n = c_1 e^{\mathrm{i}n\theta} + c_2 e^{-\mathrm{i}n\theta} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{⑩}$$

と置きます。ここではθが未知の定数です。では代入すると、

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= -Kc_1e^{\mathrm{i}(n-1)\theta} + (2K - m\omega^2)c_1e^{\mathrm{i}n\theta} - Kc_1e^{\mathrm{i}(n+1)\theta} \\
&\quad -Kc_2e^{-\mathrm{i}(n-1)\theta} + (2K - m\omega^2)c_2e^{-\mathrm{i}n\theta} - Kc_2e^{-\mathrm{i}(n+1)\theta} \\
&= \left\{-Ke^{-\mathrm{i}\theta} + (2K - m\omega^2) - Ke^{\mathrm{i}\theta}\right\}(c_1e^{\mathrm{i}n\theta} + c_2e^{-\mathrm{i}n\theta}) \\
&= \left\{-2K\cos\theta + 2K - m\omega^2\right\}(c_1e^{\mathrm{i}n\theta} + c_2e^{-\mathrm{i}n\theta})
\end{aligned}$$

となって、これが 0 になるので、

$$2K(1-\cos\theta) - m\omega^2 = 0$$

すなわち、ω が求まって

$$\begin{aligned}
\omega &= \sqrt{\frac{2K}{m}}\sqrt{1-\cos\theta} \\
&= \sqrt{\frac{2K}{m}}\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}} \\
&= 2\sqrt{\frac{K}{m}}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|
\end{aligned}$$

となります。

つまり N 個あるはずの基準振動数が求まってしまったのですが、これはあまり N 個には見えません。N 個存在するようにする条件を作るのがθで、境界条件（両端の条件）からθが N 個に決まるのです。

- 両端が固定端の時。$\eta_0 = \eta_{N+1} = 0$

  まず、$\eta_0 = c_1e + c_2e = 0$ から

  $$c_1 + c_2 = 0$$

  さらに、$\eta_{N+1} = c_1e^{\mathrm{i}(N+1)\theta} + c_2e^{-\mathrm{i}(N+1)\theta} = 2\mathrm{i}c_1\sin[(N+1)\theta] = 0$ から

  $$\sin[(N+1)\theta] = 0$$

  従って、$j \in \mathbb{Z}$ となる m を使って

  $$(N+1)\theta = j\pi$$

  $$\theta = \frac{j\pi}{N+1}$$

  という条件が出来ます。

  ここで j は全ての整数を取るかというとそうではなく、以下の二つの条件があります。

– $j = 0,\ N+1,\ 2(N+1),\ \cdots$ のとき、$\eta_n = 0$ となってしまい、無意味な解なので不適。

– $j = (N+1)+k$ のとき、$\theta = \pi + \dfrac{k\pi}{N+1}$ となり、$\left|\sin\dfrac{\pi + \frac{k\pi}{N+1}}{2}\right| = \left|\sin\left(\pi - \dfrac{\pi + \frac{k\pi}{N+1}}{2}\right)\right| = \left|\sin\dfrac{\pi - \frac{k\pi}{N+1}}{2}\right|$ となって、$\omega_{(N+1)+k} = \omega_{(N+1)-k}$ となるため[6]、$N+1$ を超えても無意味な解なので不適。

以上より、j として意味があるのは

$$j = 1,\ 2,\ 3, \cdots,\ N-1,\ N$$

の N 個であることがわかります。

- 両端が自由端の時。$\eta_0 = \eta_1,\ \eta_{N+1} = \eta_N$

  これは授業プリントを参照してください。出題範囲ではないので…。あしからず。

さて、基準振動が N 個あるとわかったところで、以下では**固定端の場合だけを考えて**先に進みます。といっても後はη_nを求めるだけです。

求まっていた c_1、c_2の関係とθを⑩の一般解に代入しましょう。ただし $c = c_1 = -c_2$を使います。

$$\eta_n = 2c\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi jn}{N+1}\right)$$

実際に意味があるのはこの実部なので、まず $2c\mathrm{i}$ を指数の形に表示して e にぶち込みます。

$$2c\mathrm{i} = A_j e^{\mathrm{i}\alpha_j}$$

と表して、

$$\eta_n = A_j \sin\left(\frac{\pi jn}{N+1}\right) e^{\mathrm{i}\alpha_j}$$

とします。実際に意味を持つのはこの実部で

$$\mathrm{Re}(\eta_n) = A_j \sin\left(\frac{\pi jn}{N+1}\right)\cos\alpha_j$$

となりました。

以上のことより、**N 自由度系での、n 番目のおもりの j 番目の基準振動**は、まずは複素数を使って次のように書けます。

$$x_n(t) = A_j \sin\left(\frac{\pi jn}{N+1}\right) e^{\mathrm{i}\alpha}\cdot e^{\mathrm{i}\omega_j t}$$

そして意味があるのはこの実部なので、

$$\underline{x_n(t) = A_j \sin\left(\frac{\pi jn}{N+1}\right)\cos(\omega_j t + \alpha_j)}$$

となります。これが一般の基準振動の形です。

さて、ここで決まったことをまとめておきます。

- 基準振動数ωは N 個あり、

$$\omega_j = 2\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\left(\frac{j\pi}{2(N+1)}\right)$$

  によって、基準振動の番号 j で定まる。

- n 番目のおもりの j 番目の基準振動は

$$x_n(t) = A_j \sin\left(\frac{\pi jn}{N+1}\right)\cos(\omega_j t + \alpha_j)$$

  で表され、A_jとα_jは、初期条件によって決まる未定常数である。

[6] ω_jは、j 番目の基準振動数です。j 番目のθか決まります。

1.5 フーリエ変換

これまでの章での事実、結果は以下の通りです。

- あらゆるの振動は基準振動の線形結合（重ね合わせ）で表される。
- N 自由度系の基準振動は、前の項で一般に求まった。

以上のことから、後は N を無限大に大きくしていけば、おもりの振動という離散的な量のそれぞれの変位から、任意の関数を波の重ね合わせで表せることになります。

これを次のように書きます。

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\cos(\omega_n t + \alpha_n)$$

$$\omega_n = 2\sqrt{\frac{K}{m}}\sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right)$$

前の章と少し表記を変えたのは、まずおもりの間隔が縮まって、弦の長さ L と位置を表す連続変数 x を使って

$$\frac{j}{N+1}\pi n \longrightarrow \frac{x}{L}\pi n$$

と表すようになりました。あとは j を n に置きかえましたがそれは大した違いではありません。

これであとは何をするかというと、まず問題設定から ω_j の係数$\sqrt{\frac{K}{m}}$が決まります。弦を扱う場合は、張力 T と線密度σが与えられていることがあります。これらの関係は、速度 v と n 番目の基準振動の波数[7]k_nを

$$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}, \qquad k_n = \frac{\pi}{L}n$$

のように決めると、

$$\omega_n = k_n v$$

の関係があるため、

$$\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$$

となります。なので、$v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$がわかっても$\omega_n$がわかったのと同じことになります。

次に、$t = 0$ での初期条件

$$f(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\cos\alpha_n$$

または

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,0) = -\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n A_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\alpha_n$$

から、α_nと A_nの値を決めます。

例えば $t = 0$ で変位が全くなく

$$f(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\cos\alpha_n = 0$$

とであったら、これは x によらず成り立ち、$A_n = 0$ だったら無意味な解になってしまうので、

$$\cos\alpha_n = 0$$

つまり

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2}$$

がわかります。あとはその他の条件で残りを求めていけばいいのです。

[7] 1 波長辺りの位相のこと。n 倍振動である n 番目の基準振動では、その値を n 倍する必要がある。

2　2007年度過去問解説

2.1　問題1 基準振動

　行列形式の運動方程式

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2K & -K & 0\\ -K & 2K & -K\\ 0 & -K & 2K\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

を書いて、振動の解を

$$x_i=C_i\cos(\omega t+\alpha_i)$$

と置き、非自明な解を持つ条件

$$\det\begin{pmatrix}m\omega^2-2K & K & 0\\ K & \omega^2-2K & K\\ 0 & K & m\omega^2-2K\end{pmatrix}=0$$

を解くことで三つの ω

$$\omega=\sqrt{\frac{2K}{m}},\ \sqrt{\frac{2\pm\sqrt{2}}{m}K}$$

を得て、さらにそれぞれの時の C_i の比の組を求めるまでは暗記です。

- $\omega=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{m}K}$ のとき

$$(C_1,C_2,C_3)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)A_1=\boldsymbol{e}_1A_1$$

- $\omega=\sqrt{\dfrac{2K}{m}}$ のとき

$$(C_1,C_2,C_3)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)A_2=\boldsymbol{e}_2A_2$$

- $\omega=\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{m}K}$ のとき

$$(C_1,C_2,C_3)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)A_3=\boldsymbol{e}_3A_3$$

さらに、一般の振動における変位 $x_i(t)$ と、基準座標での振動 $Q_i(t)$ には

$$\begin{aligned}x_1(t)&=\frac{1}{2}Q_1(t)+\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2(t)+\frac{1}{2}Q_3(t)\\ x_2(t)&=\frac{1}{\sqrt{2}}Q_1(t)-\frac{1}{2}Q_3(t)\\ x_3(t)&=\frac{1}{2}Q_1(t)-\frac{1}{\sqrt{2}}Q_2(t)+\frac{1}{2}Q_3(t)\end{aligned}$$

という関係があり、これを固有ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を行ベクトルとみなして、行列を使ってまとめて書くと、

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{pmatrix}$$

と書けます。

　基準座標はこれを完全にひっくり返した形式になり、

$$\begin{pmatrix}Q_1\\ Q_2\\ Q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{e}_1\\ \boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

つまり、

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \frac{1}{2}x_1(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2(t) + \frac{1}{2}x_3(t) \\ Q_2(t) &= \frac{1}{\sqrt{2}}x_1(t) - \frac{1}{2}x_3(t) \\ Q_3(t) &= \frac{1}{2}x_1(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2(t) + \frac{1}{2}x_3(t) \end{aligned}$$

と求まります。

どこかにも書きましたが、基準振動とは、

系全体が一つの振動数で振動している状態

のことです。

2.2 問題 2 フーリエ級数展開

n 番目の角振動数と初期位相である$\omega^{[n]}$と$\alpha^{[n]}$ は初期条件から求めます。$\dfrac{\partial y}{\partial t}(0,x)=0$ となるので

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{8A\omega^{[n]}}{\pi^2(2n-1)^2}\sin\left[\frac{\pi}{2L}(2n-1)x\right]\sin\alpha^{[n]}=0$$

つまり

$$\alpha^{[n]}=0$$

となります。

また、$\omega^{[n]}$は系の配置によって決まり、角振動数$\omega^{[n]}$と端数 $k^{[n]}=\dfrac{n\pi}{L}$ の関係から

$$\omega^{[n]}=vk^{[n]}=\sqrt{\frac{T}{\sigma}}\frac{\pi}{L}\frac{2n-1}{2}$$

となります。つまり、sin 内の x の係数に$\sqrt{\frac{T}{\sigma}}$を掛けたものになるということです。

以上より、級数展開は

$$y(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{8A}{\pi^2(2n-1)^2}\sin\left[\frac{\pi}{2L}(2n-1)x\right]\cos\left[\sqrt{\frac{T}{\sigma}}\frac{\pi(2n-1)}{2L}t\right]$$

となります。Σの中を$\xi_n(t,x)$ と表すと、$n=1,\ 2,\ 3$ のとき

$$\begin{aligned} \xi_1(0,x) &= \frac{8A}{\pi^2}\sin\left(\frac{\pi}{2L}x\right) \\ \xi_2(0,x) &= -\frac{8A}{9\pi^2}\sin\left(\frac{3\pi}{2L}x\right) \\ \xi_3(0,x) &= \frac{8A}{25\pi^2}\sin\left(\frac{5\pi}{2L}x\right) \end{aligned}$$

となります。グラフは勝手に書いてください。

$\omega^{[1]}t=\pi$のとき、時間変動を表す部分 $\cos\omega^{[1]}t$ の値が -1 となるので、$t=0$ のときは $\cos\omega^{[n]}t=1$ になることから

$$\xi_n\left(\frac{\pi}{\omega^{[1]}},x\right)=-\xi_n(0,x)$$

ということを表します。なので、$t=0$ での弦の形を $g(x)$ とすると、グラフの形は $-g(x)$ になります。

じゃあその $g(x)$ は何なんだという話になりますが、級数の特徴を見るしかないと思います。他に解き方のわかる人教えてください…。

ここでは $g(L)$ を見ます。つまり、をひたすら足し合わせていったときに、0 にならないようなら答えは (b) に決まるというわけです。$\xi_n(0,L)$ は次のような式になります。

$$\xi_n(0,L) = (-1)^{n-1}\frac{8A}{\pi^2(2n-1)^2}\sin\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)$$

一番右の sin の中身を見てみると、$\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\cdots$ となるので、$(-1)^{n-1}$ と置けます。これと一番左の $(-1)^{n-1}$ と合わせると、上手く打ち消し合って

$$\xi_n(0,L) = \frac{8A}{\pi^2(2n-1)^2}$$

となります。これを無限回足し合わせても 0 にはならないので、答えは(b) です。

2.3 問題 3 強制振動

問 1 は暗記です。証明は $z = ce^{\mathrm{i}\omega t}$ と $fe^{\mathrm{i}\omega t}$を代入して実部を求めれば良いのですが、これはずっと上の方でやっています。

$$x(t) = \frac{f}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(2\gamma\omega)^2}}\cos(\omega t-\phi)$$

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

です。

問 2 も暗記臭がします。

$$\frac{P}{M} = f^2\frac{\gamma\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}$$

と求めておいたので、

$$A(\omega)_{\mathrm{abs}} = \frac{2\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\gamma\omega)^2}$$

となります。

共鳴が起こっているとき、仕事率が最大になるので外力と速度の位相が同じになります。つまり $f(t) = Mf\cos\omega t$ に対して

$$v(t) = V\cos\omega t$$

と書けるということです。

$x(t)$ を微分すれば

$$\dot{x}(t) = \omega A\sin(\omega t-\phi)$$

となって、$\sin(\omega t-\phi) = \cos\omega t$ となるので$\phi = \dfrac{\pi}{2}$です。

2.4 問題 4 強制振動

すいません時間がないので省略します。

3 2006 年度過去問解説

3.1 問題 1 基準振動

2007 年度の問題 1 と全く同じ。解説はそちらを参照してください。

3.2 問題 2 強制振動

運動方程式は、上向きを正として

$$m\ddot{x} = -mg - kx - 6\pi a\eta\dot{x} + F(t)$$

となります。ただし、正確には運動方程式は糸の張力を T、バネの張力を S として

$$m\ddot{x} = -mg - 6\pi a\eta\dot{x} + T$$

と書いて、改めて T と S を糸のつり合いの式

$$0 = T - S + kx$$

とバネのつり合いの式

$$0 = S - F(t)$$

から求めた方が本格的です。まあどうでも良いんですが。

ついでに運動方程式を変形すると、

$$\ddot{x} + 2\frac{3\pi a\eta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x + g = F(t)$$

となります。$\gamma = \frac{3\pi a\eta}{m}$、$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ と置いて、座標を変換して

$$x + g \longrightarrow x + \frac{mg}{k}$$

とすると、見慣れた式

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

になりますね。

さて、抵抗力がある振動には、γとω_0の大小で3 種類の解がありました

- 過減衰 ($\gamma > \omega_0$)
- 臨界減衰 ($\gamma = \omega_0$)
- 減衰振動 ($\gamma < \omega_0$)

の 3 つです。ここでは振動が起こると仮定しているので減衰振動解になります。

以降の問題は暗記なので省略します。

3.3 問題 3 フーリエ級数展開

波動方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

となります。$\sqrt{\frac{T}{\sigma}} = v$ は x の微分なので右辺の$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$の方につくと覚えると良いかもしれません。

弦の形から a_m と b_m を決めていきます。$t = 0$ での弦の形 $f(x)$ は図のようになっていますが、特定の値を代入して大体の形をつかむ程度で良いと思います。

$x = 0$ を代入すると

$$u(0,0) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m$$

これが 0 になるので、まず $a_0 = a_m = 0$ がわかります。

$$u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{m\pi}{L}\right)$$

と表せました。次に、$u(\frac{L}{2},0) = 0$ を使いましょう。$x = \dfrac{L}{2}$ とすると

$$\begin{aligned} u\left(\frac{L}{2},0\right) &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\frac{m\pi}{2} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m(-1)^n \qquad\qquad (m = 2n+1 \text{ のときのみ。他は } 0) \end{aligned}$$

(b) の場合、

$$u\left(\frac{L}{2},0\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8A}{(2n+1)^2\pi^2}$$

となり、0 に収束しないような気がします。

(c) の場合、$b_m \neq 0$ なのは $m = 2,\ 6,\ 10,\ \cdots$ のときなので、

$$u\left(\frac{L}{2},0\right) = 0$$

となります。これが答えです。

あとは x 依存の部分

$$(-1)^n \frac{8A}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \qquad (m = 2(2n+1) \text{ のときのみ。他は } 0)$$

と、t 依存の部分

$$\cos\left(\frac{m\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}t\right)$$

を掛け合わせて足せば良く[8]

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8A}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}t\right)$$

n だけで統一すれば

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{8A}{(2n+1)^2\pi^2} \sin\left(\frac{2(2n+1)\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{2(2n+1)\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}t\right)$$

と表せます。

[8] 本当は一般解は $\cos\left(\frac{m\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}t + \alpha_m\right)$ となるのですが、一階微分して $t = 0$ を代入した値が 0 になるという条件から $\alpha_m = 0$ とわかるので省略しました。