2008 年 7 月 24 日　**量子論試験問題**　担当教員加藤光裕

制限時間 90 分　持込不可　答案用紙両面 1 枚　計算用紙 1 枚

《答の導き方をきちんと記すこと。最終結果だけの解答は減点される場合がある。》

I. 黒体輻射に関する Planck の公式では、温度 T での一つの定常振動あたりのエネルギーが

$$\frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

で与えられる。ここで、k は Boltzmann 定数、h は Planck 定数、ν は定常振動の振動数である。Planck は、エネルギー量子の仮説に基づいてこの公式の説明を与えた。

(1) Planck のエネルギー量子の仮説を述べよ。

(2) 上の仮説に基づいてこの式を説明せよ。但し、温度 T での分配関数は各状態のエネルギーを E として

$$Z=\sum_{\text{状態}} e^{-\frac{E}{kT}}$$

で、またエネルギーの期待値は

$$\langle E\rangle = kT^2\frac{\partial}{\partial T}\log Z$$

で与えられる。

(3) 古典論では、エネルギー等分配則により、一つの定常振動あたりのエネルギーが振動数によらず kT で与えられる。量子論において、どのような極限でこの振る舞いと一致するべきか述べよ。また上記の Planck の公式でそれが実現されている事を示せ。

II. (1) 質量 m、角振動数 ω の調和振動子の Lagrangian は、

$$L(x,\dot{x})=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

で与えられる。これから座標 x に対する共役運動量 P を求め、Hamiltonian $H(x,p)$ を導け。

(2) この系に対する時間に依存しない Schrödinger 方程式を書き下せ。

(3) 前間の方程式の最低エネルギー状態 (基底状態) に対するエネルギー固有値を、不確定性関係を用いて評価せよ。

(4) 前間の基底状態の規格化された波動関数は、$\phi_0(x)=C\exp(-\alpha x^2)$ なる形をしている。定数 C および α を決定せよ。また対応するエネルギー固有値を求めよ。但し、必要ならば次の公式を利用してもよい。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-Ay^2}dy=\sqrt{\frac{\pi}{A}}$$

(5) 前間の波動関数を用いて、$\langle\hat{x}^2\rangle-\langle\hat{x}\rangle^2$ および $\langle\hat{p}^2\rangle-\langle\hat{p}\rangle^2$ を求めよ。

【時間と答案用紙に余裕のある人は、授業や試験についての感想・要望、担当教員へのメッセージ。その他自由に書いて下さい (成績とは無関係)。】