11001

科目名 振動・波動 (20648, 21009)	教員名 菊川　芳夫	2月13日 (水) 2時限 試験時間 90 分
指定クラス 1年理 2,3(1-3,5-6,9-10,13,16,22) 1年理 1(4-5,13,22-23,28,37), 2年理	解答用紙 (両面)+計算用紙 2枚　+　1枚	持ち込みの有無 不可

問題1　なめらかで水平な台の上で，質量 M のおもり 3 個を，バネ定数 K，自然長 a_0 のバネ 4 本を用いて直線状に等間隔 a $(a > a_0)$ で連結し，両端を固定する．(図 1) この系の微小な縦振動の基準振動数，基準振動の形 (振幅の比)，基準座標を求め，「基準振動」とは何か説明せよ．

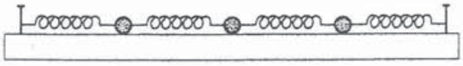

図 1: 連成振子

問題2　一本の弦が張力 T で張られている．弦の長さは L, 線密度は σ とする．弦にそって x 座標をとり，端点を $x=0$ および $x=L$ とし，弦の微小な横振動の振幅を $y(t,x)$ で表す．弦の振幅をある配位に固定し，時刻 $t=0$ で，静かに解放したところ，その後の弦の振幅 $y(t,x)$ は次の級数展開で与えられた:

$$y(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{8A}{\pi^2(2n-1)^2}\sin\left[\frac{\pi}{2L}(2n-1)x\right]\cos\left(\omega^{[n]}t+\alpha^{[n]}\right)$$

ここで A は定数とする．

1. $\omega^{[n]}$, $\alpha^{[n]}$ $(n=1,\cdots,\infty)$ を求めよ．
2. 時刻 $t=0$ での弦の振幅 $y(0,x)$ を表す級数展開の最初の 3 項 (n=1,2,3) の概形をグラフに描け．(1つのグラフにまとめて描くこと．)
3. 時刻 $t=\pi/\omega^{[1]}$ での弦の振幅の配位を表す関数は，次の a, b, c のうちのどれが最も適当と考えられるか，答えよ．

$$\text{a) } f(x)=0 \qquad \text{b) } f(x)=\begin{cases}-2A(x/L) & (0\le x\le L/2)\\ -2A(1-x/L) & (L/2\le x\le L)\end{cases} \qquad \text{c) } f(x)=-A(x/L)$$

問題3　質量 M，振動数 ω_0 の単振動子に，速度に比例する抵抗力 $-2M\gamma\dot{x}(t)$ $(\gamma>0)$ と，振動数 ω の周期的な外力 $Mf\cos(\omega t)$ が作用している．外力の周期を $T=\frac{2\pi}{\omega}$ とする．

1. 外力が作用し始めてから十分時間がたった後の解 (定常解) は，$x(t)=A\cos(\omega t-\phi)$ の形に表すことができる．A, $\tan(\phi)$ を ω, ω_0, γ および f を用いて表せ．
2. 外力の仕事率の平均値 $P=\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\{Mf\cos(\omega t)\}\,\dot{x}(t)$ は $P=\frac{1}{2}Mf\omega A_{\rm abs}$ と表すことができる．$A_{\rm abs}$ を ω, ω_0, γ および f を用いて表せ．
3. 共鳴が起こっている時，ϕ はどのような値を取るか，答えよ．また，その理由を簡潔に説明せよ．

問題４　おもりの質量 M，ひもの長さ l の振り子が，バネ定数 K，自然長 a_0 のバネを用いて直線状に等間隔 a_0 で連結された連成振子の微小な縦振動を考える．(図２) ただし，バネの質量は無視できるものとする．左端のおもり (n=1) は固定端または自由端いずれかの境界条件をみたしており，右端のおもり (n=3) は自由端である． 振り子には速度に比例する抵抗力がはたらき，その比例係数を $-2M\gamma$ $(\gamma > 0)$ とする．また，重力加速度の大きさを g として，$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ とする．

$\ddot{x}_1 = -\frac{g}{l}x_1 + k(x_2 - x_1) - kx_1$

$\ddot{x}_2 = -\frac{g}{l}x_2 + k(x_3 - x_2) - k x_2$

$\ddot{x}_3 = -\frac{g}{l}x_3 - k(x_3 - x_2)$

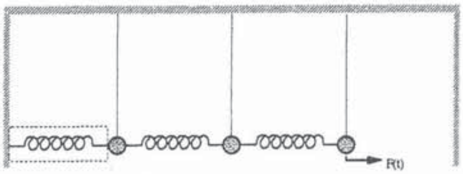

図 2: 連成振子と外力

１つのおもりに周期的な外力 $F(t) = Mf\cos(\omega t)$ を作用させ，外力の仕事率の，１周期 $T = 2\pi/\omega$ にわたる平均値 P を測定する．この平均仕事率 P を $(Mf^2/2\omega_0)$ で規格化し，ω/ω_0 の関数としてプロットしたものが図３ある．左図は右端のおもり (n=3) の場合，右図は中央のおもり (n=2) の場合にそれぞれ対応する．以下の問に答えよ．

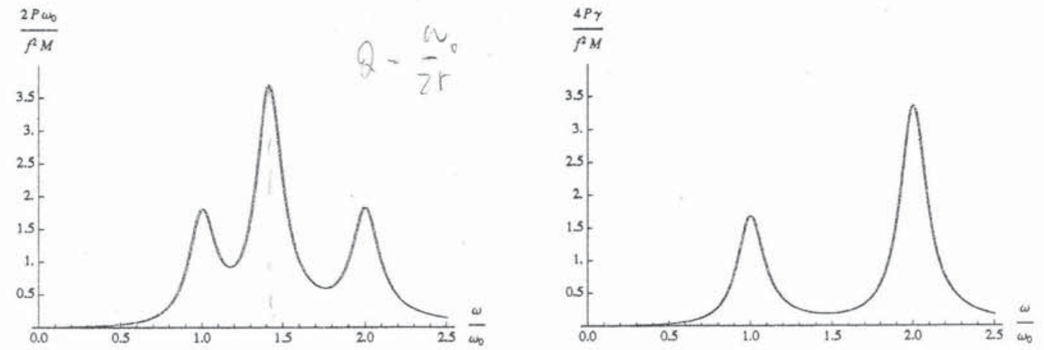

図 3: おもりに外力を作用させた場合の平均仕事率 P．n=3 (左図)．n=2(右図)．

1. 左端のおもり (n=1) は固定端と自由端のどちらの境界条件をみたしていると考えられるか．理由も述べよ．
2. 中央のおもり (n=2) に外力を作用させた場合 (図３右)，共鳴の数がひとつ少なくなっている．この理由を述べよ．
3. $\sqrt{\frac{K}{M}}/\omega_0$ の値はいくらと考えられるか．
4. 右端のおもり (n=3) に外力を作用させた場合 (図３左)，３つの共鳴の Q 値を，共鳴振動数の小さいものから，Q_1, Q_2, Q_3 とする．比 $Q_1 : Q_2 : Q_3$ をもとめよ．

$\frac{\sqrt{\frac{K}{M}}}{\omega_0}$

なされることがある。
に置かない。筆入れなども鞄等にしまい、

教科書、参考書、ノート等は鞄にしまう。