物理学基礎論 A　　平成 22 年度　前期試験問題　（木 2　担当　早田）

以下の問いに答えよ。ただし、解答用紙は 1 枚しか使えないので解答は適度な大きさで、丁寧に書くこと。

(1) $f(x) = (1-3x+2x^2)^{-1/2}$ を $x=0$ のまわりでテーラー展開せよ。ただし、x^2 までで良い。

(2) 初期条件 $x(0)=1, \dot{x}(0) = -\frac{1}{2}$ のもとで時間に関する 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + \omega^2 x(t) = 0$$

$\frac{d^3x}{dt^3}\Big|_{t=0} = \frac{d^3x}{dt^3}$

の解を求めよ。

$1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(-\omega^2 + \frac{1}{2})x^2 + \frac{1}{6}(\frac{3}{2}\omega^2 - \frac{1}{2})x^3 + \frac{1}{24}(\omega^4 - 2\omega^2 + \frac{1}{2})x^4$

(3) 月、地球の位置関係を図示し、海水の概形を描け。それをもとに、潮の満ち干が起きる理由を簡潔に述べよ。

(4) ケプラーの惑星運動の法則について次の問いに答えよ。

(4-1) 本来は太陽と惑星の両方の運動を求める 2 体問題であるが、$\boxed{\quad A \quad}$ 保存則を使うと質量 M の太陽と質量 m の惑星の相対運動に対するニュートン方程式

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GmM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

を解く問題に帰着する。ここで $\mathbf{r}$ は太陽を原点とする惑星の位置ベクトルである。太陽の質量は地球の質量に比べて極端に大きいため、本来換算質量 $\boxed{\quad B \quad}$ を使うべきところを m で置き換えてある。ケプラーの第 2 法則

太陽と惑星を結ぶ線分が一定時間に掃く面積（面積速度）は等しい。

は $\boxed{\quad C \quad}$ の大きさが保存されることから導かれる。また、$\boxed{\quad C \quad}$ の方向が保存されることから運動が 2 次元平面内に限られることが分かる。従って、$\boxed{\quad D \quad}$ 保存則を書き下すと

$$\frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \frac{GmM}{r} = E \qquad (A)$$

が得られる。空欄に入る言葉あるいは式を書け。

(4-2) 2 次元極座標 $x = r\cos\theta$,　$y = r\sin\theta$ を使って (A) を書き換えよ。

(4-3) $\boxed{\quad C \quad}$ の大きさを L として、$u = \frac{1}{r}$ に対する方程式を導き、ケプラーの第 1 法則

惑星の軌道は太陽を 1 つの焦点とする楕円である。

を示せ。

$3\frac{dx}{dt}$　$x\frac{d^3}{dt}$

(4-4) ケプラーの第 3 法則

惑星が太陽を 1 周する時間（周期）の 2 乗と軌道の長半径の 3 乗の比は全ての惑星について同じ値を持つ。

を導き、太陽の質量を決めよ。ただし、地球の軌道の長半径は 1.5×10^{11}m、ニュートンの万有引力定数は $G = 6.7 \times 10^{-11}\mathrm{Nm^2/kg^2}$ とせよ。