

「水理学」試験問題 (2013年2月4日)

1. 長さ  $x$ -方向に一様な、水平に置かれた円管内に、定常層流が流れている (Hagen-Poiseuille 流れ).  $x$ - $y$ - $z$ -直交座標系における Navier-Stokes 方程式

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} + \nu \nabla \cdot \nabla \mathbf{V}$$

を、円管横断面の中心に原点をとった  $r$ - $\theta$ -極座標系へ変換することより、この流れの流速分布支配式が

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{g}{\nu} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

であることを示せ. ただし,  $g$  は重力加速度,  $\nu$  は動粘性係数,  $u$  は  $x$  方向流速,  $\eta$  はピエゾ水頭  $\left( = \frac{P}{\rho g} + z \right)$  であり, その他の記号は通常の慣例に従う.

なお,  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$  の導出過程も含めること.

2. 「乱流」について、以下 A)~I) の用語すべてを用いて説明せよ.

- A) 流線
- B) Reynolds 数
- C) Reynolds 応力
- D) 開水路流れ
- E) 断面平均流速
- F) 摩擦勾配
- G) 確率論
- H) 完全流体
- I) 粘性流体

Handwritten derivations and notes for question 2:

- Top right:  $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$
- Middle left:  $\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$
- Bottom: A series of crossed-out terms showing the derivation of the Laplacian in polar coordinates:
 
$$\begin{aligned} & \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ & + \frac{\sin 2\theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ & + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin 2\theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ & \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\theta \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ & - \frac{\sin 2\theta \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \\ & + \frac{\sin 2\theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \end{aligned}$$