$\boxed{4}$ 次の行列式を計算せよ：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 4 & -3 \\ 1 & 7 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & -5 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & \\ 0 & x & 1+x^2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1+x^2 & x \\ 0 & & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$

ここで (2) は対角線が $1+x^2$，その右上，左下の成分が x で，他がすべて 0 であるような n 次行列式.

$\boxed{5}$ (以下で扱う行列は断らない限り n 次正方とする.)

n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ に対して，その左上隅部分の k 次正方行列を $A_{[k]} = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}$ とおくことにする $(1 \leq k \leq n)$. 例えば $A_{[1]} = a_{11}$，$A_{[n]} = A$ である.

またすべての対角成分が 1 であるような上三角行列をべき単上三角行列と呼ぶことにする（下三角行列についても同様）.

(1) A が，下三角行列 S，正方行列 B と上三角行列 T の積 $A = SBT$ で表されるならば $A_{[k]} = S_{[k]}B_{[k]}T_{[k]}$ $(1 \leq k \leq n)$ であることを示せ.

(2) A が，べき単下三角行列 S，正則な対角行列 D とべき単上三角行列 T の積 $A = SDT$ という形に表されるならば，全ての k $(1 \leq k \leq n)$ について $\det A_{[k]} \neq 0$ であることを示せ.

(3) A の $(1,1)$-成分 $a_{11} \neq 0$ ならば，べき単下三角行列 U，およびべき単上三角行列 V をうまく取って

$$UAV = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (A_1 \text{ は } n-1 \text{ 次正方行列})$$

の形に出来ることを示せ.

(4) 小問 (2) の逆が成立することを示せ. つまり，$\det A_{[k]} \neq 0$ $(1 \leq \forall k \leq n)$ が成立しているならば，べき単下三角行列 S，正則な対角行列 D とべき単上三角行列 T を選んで $A = SDT$ と表せることを証明せよ.