No.

Date

(4). Aの行ベクトルを入れかえると、行列式は −1 倍になる。

入れかえた後の行列を A' とすると、

$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

$|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a'_{i\sigma(i)} \cdots a'_{j\sigma(j)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

ただし、$a'_{i\sigma(i)} = a_{j\sigma(i)}$ であり、$a'_{j\sigma(j)} = a_{i\sigma(j)}$。
つまり、それぞれを置換することで、成分は同じになると予想がつく。
よって、$|A| = -|A'|$ となると直観的に分かる…かも。
(教科書が分かりやすい気。)

(5). Aの第jベクトル A_j を、$A_j + kA_i$ にとりかえた行列 A' について、
$|A'| = |A|$ が成り立つ。

$$|A| = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} \qquad |A'| = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ A_j + kA_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix}$$

このとき、
$$|A'| = \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_i \\ kA_i \\ \vdots \\ A_n \end{vmatrix} \to = 0. \quad \to (3)$$

$= |A|$ であると分かる

No.

Date

(6).
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
が成り立つ。

$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$
ここで、$\sigma(1)$ が 2〜n をとると、$\sigma(2)$〜$\sigma(n)$ のどれかが 1 をとることが
わかる。すると、$a_{2\sigma(2)}$ 〜 $a_{n\sigma(n)}$ のどれか0をもつため、
0以外をとる可能性があるのは、$\sigma(1) = 1$ のときのみ。

よって、$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} a_{11}\, a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$
$= a_{11} \sum_{\sigma \in S_n} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$
とできる

(7) $|A| = |{}^tA|$ が成り立つ。 (教科書より)

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad |{}^tA| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$|{}^tA| = \underbrace{\sum_{\sigma \in S_n}}_{\text{上図より}} a_{\sigma(1)1}\, a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$

ここで、$\sigma(1)$ 〜 $\sigma(n)$ を 1〜n の番号になるようならびかえる。
このとき、$\sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$
で、$|{}^tA| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma'(1)}\, a_{2\sigma'(2)} \cdots a_{n\sigma'(n)}$

ここで、$\sigma'(1)$ 〜 $\sigma'(n)$ が $\sigma(1)$〜 $\sigma(n)$ と対応して値をとるので、
ok!