No.

Date

行列式 公式まとめ.

①サラスの方法.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a\,b_2c_3 + b_2c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - c_3b_1a_2$$

② 三角行列の行列式は、対角成分の積に等しい

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & \ddots & & 0 \\ a_{31} & & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

③ 第i行ベクトルをA_iとすると、

・A'をAの第i行ベクトルをk倍して得られた行列とする(kはスカラー)

$|A'| = k|A|$

・A_iが2つの行ベクトルの和に$A_i = A'_i + A''_i$と分解できるとする。
A_iをA'_iにかえたものをA', A_iをA''_iにかえたものをA''とすると、

$|A| = |A'| + |A''|$

・$A_i = A_j$ $(i \neq j)$ のとき, $|A| = 0$

・Aの行ベクトルを1組入れかえたものをA'とすると、

$|A| = -|A'|$

・A_jを$A_j + kA_i$にとりかえた行列A'について、

$|A'| = |A|$

・
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

④ $|A| = |{}^tA|$

⑤ r次正方行列A s次正方行列B, $r\times s$行列Cに対し、

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

No.

Date

⑥ $A = (a_{ij})_{n\times n}$に対し、i行j列を取り除いたものをA_{ij}とする。このとき、$\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ij}|$ をAの(i,j)余因子という。これを用いて、

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} |A| & k=j\text{のとき} \\ 0 & k\neq j\text{のとき} \end{cases}$

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{kj}\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} |A| & k=i\text{のとき} \\ 0 & k\neq i\text{のとき} \end{cases}$

⑦ 行列A, Bについて、$|AB| = |A||B|$

⑧ Aが正則であるための必要十分条件は$|A| \neq 0$であり、このとき
$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$ が成立

⑨
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & & x_n^2 \\ \vdots & & & & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$$

⇓

全てのi, jについて積をとる。

⑩ 原点を始点の1次独立な$\mathbf{a}, \mathbf{b}$において、$\mathbf{a}$に対して$\mathbf{b}$が正の方向にある必要十分条件は行列式$|\mathbf{a}\ \mathbf{b}|$が正の値をもつことである。

⑪ 原点を始点の1次独立な$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$において、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$が右手系である必要十分条件は行列式$|\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}|$が正の値をもつことである。

⑫ ベクトル$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$において、$\mathbf{a}$から見て$\mathbf{b}$が正の方向にあるとき、$\mathbf{a}, \mathbf{b}$を2組使って作る平行四辺形の面積は、$a_1b_2 - a_2b_1$である。