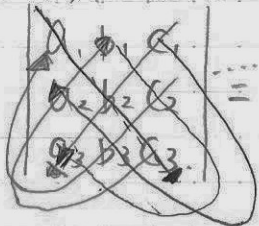


行列式 公式まとめ

① サラスの方法



$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

② 三角行列の行列式は、対角成分の積に等しい

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$$

③ 第 i 行ベクトルを A_i とおくと

• A' を A の第 i 行ベクトルを k 倍に得られた行列とおく (k はスカラー)

$$|A'| = k|A|$$

• A_i が 2 つの行ベクトルの和 $A_i = A'_i + A''_i$ と分解できる

A_i を A'_i にかえたものを A' , A_i を A''_i にかえたものを A'' とおくと

$$|A| = |A'| + |A''|$$

• $A_i = A_i$ ($i \neq j$) のとき, $|A| = 0$

• A の行ベクトルを 1 行だけかえたものを A' とおくと

$$|A| = -|A'|$$

• A_j を $A_j + kA_i$ に変えた行列 A' において

$$|A'| = |A|$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$④ |A| = |A^T|$$

⑤ r 次正方行列 A , s 次正方行列 B , $r \times s$ 行列 C について

$$\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

⑥ $A = (a_{ij})_{n \times n}$ に対し, 行 i 列 j を除いたものを A_{ij} とおくと (i, j) のとき, $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|$ を A の (i, j) 余因子としよう. \tilde{a} を用いて,

$$\begin{cases} (1) \sum_{k=1}^n a_{ik} \tilde{a}_{kj} = \begin{cases} |A| & k=j \text{ のとき} \\ 0 & k \neq j \text{ のとき} \end{cases} \\ (2) \sum_{k=1}^n a_{kj} \tilde{a}_{ij} = \begin{cases} |A| & k=i \text{ のとき} \\ 0 & k \neq i \text{ のとき} \end{cases} \end{cases}$$

⑦ 行列 A, B について, $|AB| = |A||B|$

⑧ A が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$ であり, このとき $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$ が成立

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

↓
全ての $i, j = 1, \dots, n$ について積をとる

⑩ 原点を始点の 1 次独立な a_1, b_1 に対し a_2, b_2 が正の係数である必要十分条件は行列式 $|a_1 b_1|$ が正の値をもちあわさる

⑪ 原点を始点の 1 次独立な a, b, c において, a, b, c が右系である必要十分条件は行列式 $|a b c|$ が正の値をもちあわさる

⑫ ベクトル $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ において, a が b に対して正の方向に傾いて, a, b を 2 組の基底とする平行四辺形の面積は, $a_1 b_2 - a_2 b_1$ である