No.

Date

13.(1) Aの固有値λと、固有ベクトルvを置く。このとき、

$$A^k v = A^{k-1}(Av) = A^{k-1}\lambda v = \lambda A^{k-1} v = \lambda A^{k-2}(Av) = \lambda^2 A^{k-2} v$$

という操作をくりかえすと、$A^k v = \lambda^k v$. ただし、$A^k = O$ より $\lambda^k v = 0$.

このとき、vは0でないので、$\lambda^k = 0$

つまり、$\lambda = 0$.

(別)(1) フロベニウスの定理より A^k の固有値は λ^k ($f(A)$ の固有値は $f(\lambda)$.).

(2) ① 対偶を示す。つまり、Aが対角化可能なら、$A = O$ であることを示す。
もし、Aが対角化可能なら、$\lambda = 0$のとき Aの次数と固有空間の次元が同じになることが
必要になるが、$A \neq O$だと、最大で Aの次数より1つ少ない基底しかとれない。
よって、Aが対角化可能なら、$A = O$

② 対角化可能とすると、$P^{-1}AP = O$ となる(固有値が全て0のため。)
しかし、これでは $A = O$ となり矛盾する。

14. Hintにそって、$A^{n-1}v \neq 0$ となるvをとって、$P = (A^{n-1}v, A^{n-2}v, \ldots, v)$ とおける。

$$AP = (0, A^{n-1}v, A^{n-2}v, \ldots, Av).$$

$$PN = (0, A^{n-1}v, A^{n-2}v, \ldots, Av)$$

よって、Pが逆行列をもてば、AとNが共役であると示される。
ここで、Pは $c_1A^{n-1}v + c_2A^{n-2}v + c_3A^{n-3}v \cdots c_n v = 0$ のとき、
両辺に左からAをかけると、$c_2A^{n-1}v + c_3A^{n-2}v \cdots c_n Av = 0$.
となり、これをくりかえすと、$c_1 \sim c_n = 0$ よって、Pは正則である。
つまり、$P^{-1}AP = N$ となり、AとNは共役。

No.

Date

16. Aはn次実対称行列より，$P^{-1}AP=D$ $\left({}^tPP=1,\ D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\right)$

で表すことができる。このとき，$f(x)=(x, Ax)$

$=(x, PDP^{-1}x)$　$P^{-1}={}^tP$

ここで，$\left\{(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)\cdot\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}\right\} D \begin{pmatrix}p_{11} & \cdots & \cdots & p_{n1} \\ p_{12} & & & \\ \vdots & & & \\ p_{1n} & \cdots & \cdots & p_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}=f(x)$

このとき，$f(x)=({}^tPx\cdot D\,{}^tPx)$

${}^tPx=y$ とすると，$(y\cdot Dy)$ ここで，$D=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ より

$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\lambda_3 y_3^2 \cdots\cdots \lambda_n y_n^2=f(x)$

よって，$f(x)>0 \iff \lambda_i>0$.

17. 対偶として，$A^n=O\ (n\geq 1)$ ならば，$A=O$ を示す。

A^nは実対称行列なので，$P^{-1}A^nP=D^n$ として表すことができる $({}^tPP=E_n)$

ただし，$A^n=O$より，$P^{-1}A^nP$ の固有値は全て0．よって，$D^n=O$

つまり $D=O$ より，$A=O$ となる

15. (1) $q(x, y)={}^t(x, y)\begin{pmatrix}5 & -3 \\ -3 & 5\end{pmatrix}{}^t(x, y)$

$\begin{pmatrix}5 & -3 \\ -3 & 5\end{pmatrix}=A$ とすると，$|tE-A|=\begin{vmatrix}t-5 & 3 \\ 3 & t-5\end{vmatrix}=(t-5)^2-9=t^2-10t+16=(t-8)(t-2)=0$

$t=8, 2$

$\lambda=8$のとき，掃き出し法を用いると，

$\begin{matrix}3 & 3 \\ 3 & 3 \\ \hline 1 & 1 \\ 0 & 0\end{matrix}$

よって，$x_1+x_2=0$

$x_1=a$ とすると，$\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}$

固有空間の基底として $\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}$ がとれる。

$\lambda=2$のとき，

$\begin{vmatrix}-3 & 3 \\ 3 & -3\end{vmatrix}$
$\begin{matrix}-1 & 1 \\ 0 & 0\end{matrix}$

よって，$x_1-x_2=0$

$x_1=b$とすると $\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$

固有空間の基底として $\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$ がとれる。

この二つのベクトルを正規直交化すると，$u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}$，$u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$ がとれる。

これを用いて，$\underbrace{P=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}}_{\text{これが解答で違う}}$ を作ると，$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}8 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}$ で，$q=8x'^2+2y'^2$.

$x'=P^{-1}x$ でCを変換すると，$f(c)=x'^2+\frac{y'^2}{4}=1$ となる。

このとき，$f(c)$をPで変換したものがCなので，$-\frac{\pi}{4}$回転したものが曲線となる