# 「線形代数学 B」演習問題

**1.** $U, W$ はベクトル空間 $V$ の部分空間とする．

(1) 交わり $U \cap W$ は $V$ の部分空間であることを示せ．
(2) 和集合 $U \cup W$ は部分空間とは限らない．反例を一つあげよ．

**2.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ とする．$\mathbb{R}^4$ の部分空間 $U = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4 \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$, $W = \{A\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^4\}$ の次元と 1 組の基底を求めよ．

**3.** $\mathbb{R}^3$ の原点 $O$ を通り，方向ベクトル $\boldsymbol{d} \neq \boldsymbol{0}$ の直線を $\ell$ とする．直線 $\ell$ に関する対称変換を $f$ とする．

(1) $f(\boldsymbol{x}) = \frac{2}{\|\boldsymbol{d}\|^2}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{d})\boldsymbol{d} - \boldsymbol{x}$ であることを示せ．(( , ) は内積．)
(2) 1 は $f$（つまり $f$ の表現行列 $A$ の）固有値であり，$\boldsymbol{d}$ は 1 に属する固有ベクトルであることを示せ．
(3) $\boldsymbol{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ のとき，線形変換 $f$ の標準基底に関する表現行列 $A$ を求めよ．

**4.** 標準基底に関して $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ で表される $\mathbb{R}^3$ の線形変換 $f$ を考える．

(1) $f$ が全単射でになる $\alpha$ の条件を求めよ．
(2) $f$ の像と核の次元を求めよ．

**5.** $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ について，1 次変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ を考える．

(1) $A$ の逆行列を求めよ．
(2) 曲面 $S : x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz + zx - 2 = 0$ を $f$ で変換した曲面 $f(S)$ の方程式を求めよ．
(3) 曲面 $S$ で囲まれる部分の体積を求めよ．

**6.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ とし，線形変換 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3)$ を考える．

(1) 平面 $H : ax + y + z = 0$ のベクトル表示を一つ求めよ．
(2) $H$ を $f$ で変換した図形が直線になるとき，$a$ の値を求めよ．

**7.** $\mathbb{R}^3$ のベクトル $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を考える．

(1) $\mathcal{B} = [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$, $\mathcal{C} = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]$ はそれぞれ $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ．
(2) $\mathcal{B}$ から $\mathcal{C}$ への基底の変換行列を求めよ．

**8.** 次の行列 $A$ は対角化可能か．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

**9.** $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(1) $A$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．
(2) $A^n$ を求めよ．

**10.** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

(1) $A$ は対角化できないことを示せ．
(2) $A$ を三角化せよ．(Hint: $N = A - \lambda E$ ($\lambda$ は $A$ の固有値) とおき，$N\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{v}$ を一つとり $P = (N\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v})$ とする．)

**11.** 次の実対称行列を直交行列で対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$　(2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

**12.** $\lambda$ は正則行列 $A$ の固有値とする．

(1) $\lambda \neq 0$ であることを示せ．
(2) $1/\lambda$ は $A^{-1}$ の固有値であることを示せ．

**13.** ある $k \geq 1$ について $A^k = O$ とする．(このような行列 $A$ をべき零行列という．) 以下を示せ．

(1) $A$ の固有値はすべて 0.
(2) $A \neq O$ ならば $A$ は対角化不可能．

**14.** $n$ 次正方行列 $A$ が $A^{n-1} \neq O$ かつ $A^n = O$ をみたすとする．このとき，$A$ は $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ O & & & 0 \end{pmatrix}$ に共役であることを示せ．(Hint: $A^{n-1}\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{v}$ をとり，$P = (A^{n-1}\boldsymbol{v}, A^{n-2}\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{v})$ を考える．)

**15.** $xy$ 平面上の曲線 $C : 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ を考える．

(1) 2 次形式 $q(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$ を標準化せよ．
(2) 曲線 $C$ の概形を図示せよ．

**16.** $A$ は $n$ 次実対称行列とし，$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ とおく．$f(\boldsymbol{x}) > 0$ $(\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0})$ となる必要十分条件は $A$ のすべての固有値が正であることを示せ．(このような対称行列を正定値行列という．)

**17.** 実対称行列 $A$ について, $A \neq O$ ならば $A^n \neq O$ $(n \geq 1)$ であることを示せ．

解答の概略. (詳細は各自で補うこと)

**1.** (1) 略.

(2) $V = \mathbb{R}^2$ とし，$U = \{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} | x \in \mathbb{R}\}$, $W = \{\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} | y \in \mathbb{R}\}$ とする．このとき，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$, $\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ であるが，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \notin U \cup W$ であるので $U \cup W$ は部分空間でない．

**2.** 掃き出し法で $A$ を階段行列に直すと $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ になる．従って $\dim W = 2$ で $W$ の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解は $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

従って $U$ の基底は $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で次元は 2.

**3.** (1) $\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{d}}{\|\boldsymbol{d}\|}$ は大きさ 1 の単位ベクトルである．$\boldsymbol{x}$ を $l$ に射影したベクトルは $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ である．このとき，$\boldsymbol{x} + f(\boldsymbol{x}) = 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$ となる．この式を $\boldsymbol{d}$ で表すと示したい式になる．

(2) $\boldsymbol{d}$ は $l$ 上にあるので明らかに $f(\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{d}$ つまり $A\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d}$ である．これは 1 が固有値で $\boldsymbol{d}$ が固有ベクトルであることを意味する．

(3) 成分計算すると $f(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ より

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

**4.** (1) $f$ 全単射 $\iff$ $A$ 正則　なので $|A| = -\alpha + 1 \neq 0$. 故に $\alpha \neq 1$.

(2) $\alpha \neq 1$ のとき，$f$ は全単射なので $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$, $\dim \mathrm{Im}\, f = 3$.

$\alpha = 1$ のとき，掃き出し法により $\mathrm{rank}\, A = 2$ であるので $\dim \mathrm{Ker}\, f = 1$, $\dim \mathrm{Im}\, f = 2$.

**5.** (1) 掃き出し法により $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(2) $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ とすると $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{x}'$. この成分を式に代入して計算すると答 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ を得る．

(3) $f$ により体積は $|\det A| = 2$ 倍になる．$f(S)$ : $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ で囲まれる部分の体積は $\frac{32}{3}\pi$ より求める体積は $\frac{16}{3}\pi$.

**6.** (1) 法線ベクトルに垂直な 1 次独立なベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ をとる．例えば $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$ がとれる．このとき，$H : \boldsymbol{x} = t\boldsymbol{v} + s\boldsymbol{w}$ である．

(2) $f(H) : f(\boldsymbol{x}) = tf(\boldsymbol{v}) + sf(\boldsymbol{w})$ であるから，$f(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $f(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} 3-3a \\ -3+3a \\ -2+2a \end{pmatrix}$ が 1 次従属であれば $f(H)$ は直線になる．1 次従属になる $a$ を求めると $a = 1$ である．

**7.** (1) $|\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}| = 2 \neq 0$, $|\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}| = -1 \neq 0$. これらは次元に等しい個数からなる 1 次独立なベクトルの組であるので基底である．

(2) 基底の変換行列を $A$ とすると．$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})A$ であるので $A = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})^{-1}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

**8.** (1) 固有値は 2, 1, 0 で相異なるので対角化可能.

(2) 固有値は $a$ のみ（重複度 3）で 1 次独立な固有ベクトルは 2 つしかとれないので対角化不可能.

(別解；固有値は $a$ のみ（重複度 3). 対角化可能なら $P^{-1}AP = aE$ となるが，このとき $A = aE$ となり矛盾.）

**9.** (1) 固有値は 3, 2 で固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．$P = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ と

おくと，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ となるので $A^n = P\begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-3^n & 2^{n+1}-2\cdot 3^n \\ -2^n+3^n & -2^n+2\cdot 3^n \end{pmatrix}$.

**10.** (1) 固有値は 2 のみ（重複度 2）. 1 次独立な固有ベクトルは 1 つしかとれないので対角化不可能.

(2) $N = A - 2E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおくと，$N\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくと $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ で $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

**11.** (1) 固有値 4, $-2$, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. これらは直交するので大きさを 1 にして正規直交基は $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. このとき $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ は直交行列で $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

(2) 固有値は 2 (重複度 2) と $-1$ である．2 に属する 1 次独立な固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる．$-1$ に属する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる.

これら正規直交化すると $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる.

$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ とおくと直交行列で $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

**12.** (1) $|A| = \prod_{i=1}^{n} \lambda_n \neq 0$ より固有値は 0 でない.

(2) $A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ より，$A^{-1}\boldsymbol{v} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{v}$. これは $\frac{1}{\lambda}$ が $A^{-1}$ の固有値であることを示す.

**13.** (1) フロベニウスの定理より $\lambda^k = 0$. 故に $\lambda = 0$.

(2) 対角化可能とすると固有値が 0 のみなので $P^{-1}AP = O$ ととなるが，このとき $A = O$ となり矛盾.

**14.** Hint のように $\boldsymbol{v}$ をとる．$\{A^{n-1}\boldsymbol{v}, \ldots, A\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}\}$ は 1 次独立である．従って $P$ は正則.

($\because$) $c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A\boldsymbol{v} + c_0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ とする．両辺に $A^{n-1}$ を施すと，$c_0A^{n-1}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となるので $c_0 = 0$. このとき $c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ となるが $A^{n-2}$ を施すと $c_1 = 0$ がわかる．以下同様にして $c_i = 0$ がいえる.

$A(A^{n-1}\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$, $A(A^{n-2}\boldsymbol{v}) = A^{n-1}\boldsymbol{v}, \ldots, A\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{v}$ より

$$A(A^{n-1}\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{v}) = (A^{n-1}\boldsymbol{v}, \ldots, \boldsymbol{v})N.$$

故に $AP = PN$ となる．$P^{-1}AP = N$ なので $A$, $N$ は共役.

**15.** (1) $q$ の係数行列は $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. $A$ の固有値は 8, 2 でそれぞれの固有ベクトルを正規直交化すると例えば $\boldsymbol{u}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{u}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ が得られる．このとき，$P = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ は回転行列となっていて，$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ である．以上より $q = 8x^2 + 2y^2$.

(2) 線形変換 $f : \boldsymbol{x}' = P^{-1}\boldsymbol{x} = {}^tP\boldsymbol{x}$ で $C$ を変換すると $f(C) : x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 1$（楕円）となるから $C$ は $f(C)$ を $P$ で変換してもの，すなわち，$f(C)$ を $-\frac{\pi}{4}$ 回転した曲線になる.（図は省略）

**16.** $A$ の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ とする．$A$ を直交行列 $P$ で対角化すると $P^{-1}AP = D$（$D$ は $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を対角成分にもつ対角行列）．$\boldsymbol{y} = {}^tP\boldsymbol{x}$ とおくと

$f(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, PDP^{-1}\boldsymbol{x}) = ({}^tP\boldsymbol{x}, D{}^tP\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{y}, D\boldsymbol{y}) = \lambda_1y_1^2 + \cdots + \lambda_ny_n^2$ となる.

これより $f(\boldsymbol{x}) > 0$ $(\boldsymbol{x} \neq 0) \iff \lambda_i > 0$ $(1 \leq i \leq n)$.

**17.** 対偶を示す．$A$ は対角化可能なので $P^{-1}AP = D$（対角行列）とすると，$P^{-1}A^nP = D^n$. ここで $A^n = O$ ならば $D^n = O$ となり $D$ の固有値は 0 のみとなる．このとき $D = O$ となるので $A = PDP^{-1}$ より $A = O$ となる.