(注)とても手抜きなのでご了承ください。

7 章　偏微分　（**定理編**）

・シュワルツの不等式　$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \le |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$

・$\boxed{\text{定理 7.3}}$　「$\overline{D}$:有界閉集合($\subset \boldsymbol{R^n}$)　$f(\boldsymbol{x}):\overline{D}$ で連続」$\Rightarrow f(\boldsymbol{x})$ は $\overline{D}$ で有界

・$\boxed{\text{定理 7.4}}$　上の定理と同条件の下で $f(\boldsymbol{x})$ は $\overline{D}$ で最大値、最小値を持つ

（$\exists x_1, x_2 \in \overline{D}$　　$f(\boldsymbol{x}_1) \le f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{x}_2)$　$\forall \boldsymbol{x} \in \overline{D}$）

・$\boxed{\text{定理 7.5}}$　$\overline{D}$:有界閉集合$\subset \boldsymbol{R}^n$　　$f(\boldsymbol{x}):\overline{D}$ で連続$\Rightarrow f(\boldsymbol{x}):\overline{D}$ で一様連続

・$\boxed{\text{定理 7.5'}}$　$f(\boldsymbol{x}):D$ で一様連続$\Rightarrow f(\boldsymbol{x})$ は $\overline{D}$ に連続に拡張でき、それは一意的

・$\boxed{\text{定理 7.6.0}}$　$f(x,y)$が(a,b) で全微分可能

$\Leftrightarrow \alpha(x,y), \beta(x,y):(a,b)$で連続

$f(x,y) = f(a,b) + \alpha(x,y)(x-a) + \beta(x,y)(y-b)$

・$\boxed{\text{定理 7.6}}$　$f(x,y)$が(a,b) で全微分可能$\Rightarrow f(x,y):(a,b)$で連続

・$\boxed{\text{定理 7.7'}}$　$f(x,y)$が(a,b) で全微分可能$\Rightarrow f(x,y)$は(a,b)で全ての方向に方向微分可能で $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(a,b) = n_1 A + n_2 B$　特に$\left\{\begin{array}{l} f_x(a,b) = A \\ f_y(a,b) = B \end{array}\right.$

・$\boxed{\text{定理 7.7''}}$　$f(x,y)$:点(a,b)の近傍でf_xが存在し連続　$\exists f_y(a,b)$

$\Rightarrow f(x,y)$は(a,b) で全微分可能

・$\boxed{\text{定理 7.8}}$　領域Dでf_{xy}, f_{yx} が存在して連続$\Rightarrow$ 領域Dで$f_{xy} = f_{yx}$

・$\boxed{\text{定理 7.8'}}$　$f(x,y):D$でC^m級$\Rightarrow f(x,y)$のm次までの偏導関数は微分の順序によらない

・$\boxed{\text{定理 7.9}}$　$z=f(x,y)$：領域Dで全微分可能

$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$：区間$I$で微分可能$(\varphi(t),\psi(t))\in D\ (\forall t\in I)$

$z=F(t)=f(\varphi(t),\psi(t))$とおく

$\Rightarrow F(t)$はIで微分可能で、$F'(t)=f_x(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t)+f_y(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)$

$$\left(\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)$$

・$\boxed{\text{定理 7.10'}}$　$z=f(x,y)$：領域Dで全微分可能

$\begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \end{cases}$：領域$D'$で偏微分可能　$(\varphi(u,v),\psi(u,v)\in D\quad (u,v)\in D')$

とする

$F(u,v)=f\{\varphi(u,v),\psi(u,v)\}$とおく

(1)　$f(u,v)$は偏微分可能で

$F_u(u,v)=f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_u(u,v)+f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_u(u,v)$

$F_v(u,v)=f_x(\varphi(u,v),\psi(u,v))\varphi_v(u,v)+f_y(\varphi(u,v),\psi(u,v))\psi_v(u,v)$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

(2)　φ,ψ：全微分可能$\Rightarrow F$：全微分可能

(3)　$f,\varphi,\psi:C^1$級$\Rightarrow F:C^1$級

・$\boxed{\text{定理 7.11}}$　$f(x,y)$：領域DでC^m級$(m=1,2,3\cdots)$

2点$(a,b),(a+h,b+k)$を結ぶ線分が両端も含めD内にある

$$\Rightarrow f(a+h,b+k)=\sum_{l=0}^{m-1}\frac{1}{l!}\cdot\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^l f(a+h,b+k)+R_m$$

$$R_m=\frac{1}{m!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(a+\theta h,b+\theta k)\quad (0<\exists\theta<1)$$