No.

Date

行列式 … $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

①3列までのやつに使える …… サラスの方法

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdots \; a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - c_1 b_2 a_3 - b_1 a_2 c_3 - a_1 c_2 b_3$$

②便利な性質，三角行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & & a_{nn} \end{pmatrix}$$ とすると，$|A| = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$

なぜなら，$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ だが，
項の $a_{11} a_{22} a_{33} \cdots a_{nn}$ 以外はどれか0を含むためである。

③行列式一般における便利な性質

(1) n次の正方行列Aにおいて，行ベクトルをA_iとする。
A_iをk倍した行列をA'とすると，$|A'| = k|A|$.

↳ $|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$
$|A'| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdots k a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$

つまり，$|A| \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $|A'| \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ & & \\ k a_{i1} & k a_{i2} \cdots & k a_{in} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

1つの項の中で，1つの行から1つずつ成分がえらばれるので，
$|A'| = k|A|$ と表すことができる。

(2) $A_i = A'_i + A''_i$ と分解させるとする。A'_i とA_iを取りかえた行列をA'とし，
A_iをA''_iにとりかえたのをA''とすると，$|A| = |A'| + |A''|$

まず

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a''_{i1} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ とできる

このとき，$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ より．

かならず$|A|$の足し算の全ての項に$a_{i1} \sim a_{in}$を含むため，それを
$(a'_{i1} + a''_{i1})$，$(a'_{i2} + a''_{i2})$ ……$(a'_{in} + a''_{in})$ に変換する。
そして，それを分配法則によってわければ，$|A| = |A'| + |A''|$ となるのが
直観的にわかる…かな？

(3) $A_i = A_j$ のとき，$(i \neq j)$ $|A| = 0$

$A_i = (a_{i1}, a_{i2}\ a_{i3} \cdots a_{in})$
$A_j = (a_{j1}\ a_{j2} \cdots\ a_{jn})$ とすると，$a_{i1} = a_{j1}$，$a_{j2} = a_{i2} \cdots a_{jn} = a_{in}$

$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$
ここで，下のように考える
$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i1} \cdots a_{j2} \cdots a_{n\sigma(n)}$
$\quad\quad ||$
$a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i2} a_{j1} \cdots a_{n\sigma(n)}$.
が成り立つのは明白である。
これが全ての項において，作られる。$\begin{pmatrix} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\alpha} a_{j\beta} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ || \\ a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\beta} a_{j\alpha} \cdots a_{n\sigma(n)} \end{pmatrix}$
また，この組は1回の置換がそれぞれおこったことで生まれるので，$\mathrm{sgn}(\sigma)$の正負が逆となるため，
$\mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\alpha} a_{j\beta} \cdots a_{n\sigma(n)}$
$\quad\quad ||$
$-\mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{i\beta} \cdots a_{j\alpha} \cdots a_{n\sigma(n)}$
より，$|A| = 0$