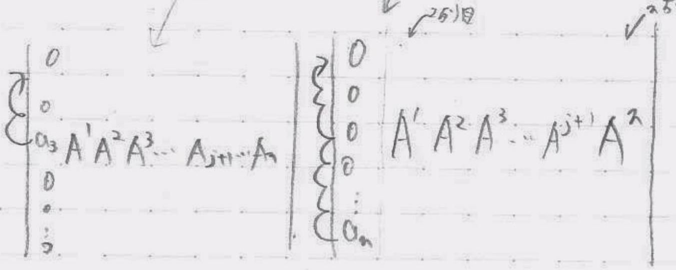
No.
Date

⑤ 余因子展開 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ が i行とj列をぬいたものを、
A_{ij} とすると、$\tilde{a}_{ij}=(-1)^{i+j}|A_{ij}|$ で余因子という。

このとき、(1) $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\tilde{a}_{ij}\begin{cases}=|A| & k=j\\ =0 & k\neq j\end{cases}$

$k=j$ のとき、Aのj列ベクトルを $A^j=a_{1j}e_1+a_{2j}e_2+a_{nj}e_n$ とする。このとき、A^j を一番前にもってくると、

$|A|=(-1)^{j-1}|A^jA^1A^2\cdots A^{j+1}\cdots A^n|$
$=(-1)^{j-1}|a_{1j}e_1A^1A^2\cdots A^{j+1}\cdots A^n|$
$+(-1)^{j-1}|a_{2j}e_2A^1A^2\cdots A^{j+1}\cdots A^n|$
$+(-1)^{j-1}|a_{3j}e_3A^1A^2\cdots A^{j+1}\cdots A_n|$
$\vdots$
$+(-1)^{j-1}|a_{nj}e_nA^1A^2\cdots A^{j+1}\cdots A^n|$



上にもっていくと…？(6)が使える。

これより、$|A|=(-1)^{j-1}(-1)^{1-1}a_{1j}|A^1\cdots A^n|$
$+(-1)^{j-1}(-1)^{2-1}a_{2j}|A^1\cdots A^n|+(-1)^{j-1}(-1)^{3-1}a_{3j}|A^1\cdots A^n|$
$\cdots+(-1)^{j-1}(-1)^{n-1}a_{nj}|A^1\cdots A^n|$
$=(-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_{ij}|A_{ij}|$
$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\tilde{a}_{ij}$

No.
Date

$k\neq j$ のとき、$k=j$ のときにAで考えたものを、A^k に置き換えた
$B=(A^1A^2\cdots A^{j-1}A^kA^{j+1}\cdots A^n)$ のときで、A^k は $A^1\sim A^n$ のどれかと同じなので、$|B|=0$

(2) $\sum_{j=1}^{n}a_{kj}\tilde{a}_{ij}\begin{cases}|A| & k=i\\ 0 & k\neq i\end{cases}$
これは、転置を考えればokであろう。

⑥ … 教科書をごらん下さい。教科書以外の証明ができません。

k次正方行列A, s次〃 B, r×s次行列C：$\begin{vmatrix}A&C\\O&B\end{vmatrix}=|A||B|$. P44. これは、余因子を使ってます。

⑦ $|AB|=|A||B|$.

$C=\begin{pmatrix}A&O\\-E&B\end{pmatrix}$ とする。

$\begin{pmatrix}A&O\\-E&B\end{pmatrix}$ のうち $\begin{pmatrix}-E&B\end{pmatrix}$ の部分を、それぞれ $a_{i1},a_{i2}\sim a_{in}$ 倍して、C_i に加えることをくりかえす。($1\leq i\leq n$)
⇓
つまり、部分的にAをかけるということ。

$|C|=\begin{vmatrix}A&O\\-E&B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\overset{A-A}{O}&\overset{O+AB}{AB}\\-E&B\end{vmatrix}$

[A,O]とE,B]でそのまま入れかえる。このときn次なので、n回置換する必要がある

$|C|=(-1)^n\begin{vmatrix}-E&B\\O&AB\end{vmatrix}=(-1)^n|-E||AB|$ n個の(-1)がでてくる。
$=(-1)^n(-1)^n|AB||E|$
$=|AB|$

また、⑥より、$\begin{vmatrix}A&O\\-E&B\end{vmatrix}=|A||B|$