

線形 3

一次独立と一次従属

組 $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ と、その一部からなる組 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}\}$ を考える。

この時、 $1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq r$ かつ $1 \leq s \leq r$ であるとする。

1. $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ が一次独立なら、 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}\}$ も一次独立であるといえる。

証明（教科書のやつの簡単な解説）

$a_{i_1}v_{i_1} + a_{i_2}v_{i_2} + \dots + a_{i_s}v_{i_s} = 0$ とする。

この時、 $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ のなかのベクトルのうち、 $v_{i_1} \sim v_{i_s}$ 以外のベクトルについている全ての係数を表すために、 $a_j = 0$ ($j \neq i_1, i_2, \dots, i_s$) という記号を用いる。ここで、 $a_j = 0$ とすると、 $a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_rv_r = 0$ が常になりたつ。また、仮定より、 $a_1 \sim a_r$ はすべて 0 なので、 $a_{i_1} \sim a_{i_s}$ はすべて 0 によって、 $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_s}\}$ は一次独立である。