基底と次元

基底の定義
Ｖの順序を考慮したベクトルの組［ｖ１………ｖｎ］が、次の　二つの条件を満たしているとき、［ｖ１………ｖｎ］が基底と呼ばれる。
（Ｂ１）｛ｖ１………ｖｎ｝は一次独立である。
（Ｂ２）｛ｖ１………ｖｎ｝は、Ｖを生成する。つまり、Ｖ＝〈ｖ１………ｖｎ〉

次元の定義
基底をなすベクトルの数

ここから、基底と次元を発展させていきます。

Ａはｍ×ｎ行列とし、Ｖ＝｛Ｆに含まれるｘの中で､､Ａｘ＝Ｏ｝とおく。
この次元について、dimＶ＝ｎ－rankＡ

証明（解説）
まず、Ａｘ＝Ｏを掃き出し法によって計算すると、一般解が、ｓを解の自由度とすると、
ｘ＝t1v1+t2v2+……tsvs で表される。という風に説明されてるが、Ａｘ＝Ｏを具体的に解いて思い出してみよう

$$A=\begin{matrix} 1 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & -4 & -6 \\ -2 & -4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & -6 & -10 \end{matrix}$$

という行列を考える。

$$A\to\begin{matrix} 1 & 2 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 \end{matrix}\to\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{matrix}$$

$$\to\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \end{matrix}\to\begin{matrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

この計算から、以下の連立方程式を立てる

$$
\begin{aligned}
x_1+2x_2+ \qquad\qquad\qquad\quad x_5&=0\\
x_3 \qquad -5x_5&=0\\
x_4-2x_5&=0
\end{aligned}
$$

このとき、主成分となっていない $x_2=t_1$、$x_5=t_2$ とおくと、

x

$$
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

と表すことができる。このとき、このベクトルを

$x=t_1v_1+t_2v_2$ と表すことができると思いだせる。

ここで、本題にもどるとする。

$x=t_1v_1+t_2v_2\ldots.+t_sv_s$ で表すことができる。このとき、x は v_1~v_s の一次結合によって表されているので、$V=\langle v_1,v_2,,,,,v_s\rangle$（B２）

次に、パラメーター t_k を導入した変数を、x_{ik} と表す。このとき、$t_k=x_{ik}$ である。（上の例でいえば、$t_1=x_2$、$t_2=x_5$）

また、ベクトル v_j の ik 成分 $=1$ $(j=k)$

0 $(j\neq k)$

であるということは常に成り立っている。

これより、$\alpha_1v_1+\alpha_2v_2+\cdots\alpha_sv_s=0$ が成り立つ時の係数 α_1～α_s は、全て０である。なぜなら、それぞれのベクトル v_j のもつ独特な ik 成分が存在するからである。（別の言い方をすると、ある ik 成分について、ベクトル v_1～v_s 全てにおいて見てみると、ベクトル v_k 以外のベクトルではすべて０であり、その ik 成分の和を０にするためには、v_k の係数を０にするしかない。これが全てのベクトル v_j についていえるため、一次独立である。）

ここで、$\dim V=s$（解の自由度）であり、$s=n-\mathrm{rank}A$ なので、証明できる

教科書と同様の順に、証明をできるだけわかりやすく解説する（つもり）

命題５．６
Ｖのベクトルの組｛$w_1 \cdots w_n$｝、｛$v_1 \cdots v_m$｝があり、各w_jはv_1～v_mの一次結合であるとする。このとき、$m<n$ならば、｛w_1～w_n｝は一次従属である。

証明（の解説？）
$w_j = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + \cdots a_{mj}v_m$とおける。この式を、
$A=(a_{ij})_{m\times n}$で定義される行列Ａを用いると、
$(w_1 \cdots w_n) = (v_1 \cdots v_m) \times A$と表せる。
ここで、Ａの行の数はｍであるため、rankＡは行の数以下であるのは明らかである。つまり、$\mathrm{rank}A \leqq m < n$
また、連立方程式$Ax=0$となるベクトルxを設定して、集合Ｖをこのx全体として表すとする。また、この集合Ｖにおいて、$\dim V = n - \mathrm{rank}A \neq 0$
この式が示すのは、Ｖに含まれるベクトルxの成分の中にいくつかの不定定数をもち、$x=O$以外の解があるとわかる。
｛$x=(t_1+t_2 \quad 0 \quad t_2)$｝のような形になる｝
ここで、$c\neq O$であるベクトルcをxの解として設定する。この時、

$$c_1w_1+c_2w_2\cdots c_nw_n=(w_1\cdots w_n)c$$
$$=(v_1\cdots v_m)Ac=O$$

よって、$(w_1 \cdots w_n)$は一次従属である。

定理５．７　ベクトル空間Ｖの次元は基底の取り方によらず定まる。
これは、定理の５．６が理解できれば教科書に書いてある通りなので、ここには書かない
基底の拡大
命題５．８
ベクトル空間Ｖの一次独立なベクトルの組｛$v_1 \cdots v_m$｝から生成される部分空間をＵとする。$U\neq V$かつ、Ｖに含まれていれば、任意のＶに含まれていて、なおかつＵに含まれていない任意のベクトルv_{m+1}にたいして、
｛$v_1 \cdots v_m, v_{m+1}$｝は一次独立である。

これの証明も教科書のものがわかりやすくて、僕にはこれ以上証明が欠けないため、教科書をご覧ください。

定理５．９dimＶ＝ｎ＞ｍ≧０とする。ｍこのベクトルの組｛ｖ１・・・ｖｍ｝は一次独立とする。このとき（ｎ－ｍ）個のＶのベクトルｖm+1・・・ｖn を追加して、［ｖ１・・・ｖｎ］がＶの基底となるようにできる。

証明

Ｕｍ＝＜ｖ１・・・ｖｍ＞とおくと、ＵｍはＶに含まれていて、なおかつＶと同じではない。同じでないのは、もし同じだと dimＶ＝ｍとなって、同じ集合から得られる次元が異なることになり、矛盾するからである。

次に、命題５．８に倣って次々と一次独立なベクトルを｛ｖ１・・・ｖｍ｝にくわえていき、｛ｖ１・・・ｖｍ、ｖｍ＋１、・・・ｖｎ｝までは一次独立であるということが、命題５．８からわかる。

次に、Ｕｎ＝＜ｖ１・・・ｖｍ、ｖｍ＋１、・・・ｖｎ＞として、これについて考える。ＵｎがＶに含まれていて、なおかつＵｎ≠Ｖなら、Ｖに含まれるがＵｎに含まれないｖｎ＋１が存在して、｛ｖ１・・・ｖｎ＋１｝が一次独立になる。しかし、Ｖの基底となる別のベクトル｛ｗ１、ｗ２・・・ｗｎ｝というｎ個のベクトルの組を設定すると、ｖｊはＶに含まれるので、｛ｗ１、ｗ２・・・ｗｎ｝の一次結合によって表される。

このとき、命題５．６から｛ｖ１・・・ｖｎ＋１｝は一次従属であるとわかり、矛盾する。よって、Ｕｎ＝Ｖで、｛ｖ１・・・ｖｎ｝はＶの基底である。