

$$\begin{vmatrix} a^2 & (b-c)^2 & bc \\ b^2 & (c-a)^2 & ca \\ c^2 & (a-b)^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^2 + b^2 + c^2 - 2bc & bc \\ b^2 & a^2 + c^2 + b^2 - 2ca & ca \\ c^2 & a^2 + b^2 + c^2 - 2ab & ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^2 + b^2 + c^2 & bc \\ b^2 & a^2 + c^2 + b^2 & ca \\ c^2 & a^2 + b^2 + c^2 & ab \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) \begin{vmatrix} a^2 & 1 & bc \\ b^2 & 1 & ca \\ c^2 & 1 & ab \end{vmatrix}$$

$$(a^2 + b^2 + c^2) \begin{vmatrix} a^2 & 1 & bc \\ b^2 - a^2 & 0 & ca - bc \\ c^2 - a^2 & 0 & ab - bc \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} b^2 - a^2 & ca - bc \\ c^2 - a^2 & ab - bc \end{vmatrix}$$

$$= -(a^2 + b^2 + c^2)(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b+a & -c \\ c+a & -b \end{vmatrix}$$

~~$$= -(a^2 + b^2 + c^2)(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} b+a & -c \\ c+a & -b \end{vmatrix}$$~~

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(b-a)(c-a) \begin{vmatrix} a+b+c & c \\ a+b+c & b \end{vmatrix}$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(b-c)(b-a)(c-a)(a+b+c)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$$

$$(a^3 + b^3 + c^3) - (a^3 + b^3 + c^3) - (a^3 + b^3 + c^3) - (a^3 + b^3 + c^3)$$