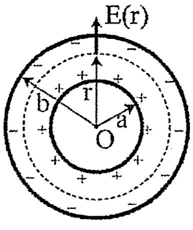
「物理学基礎論 B」　木 2: 共北 28　　担当: 川畑

第 6 回 (11/13) 小テスト

学生番号【　ひみつ　　】　氏名【 ぱぱ　あやきち 】

1. 内径 a,　外形 b、長さ l のコンデンサの静電容量を求めよ。。



半径 r のところの電場は
ガウスの法則より

$$2\pi r l E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}$$

a と b の電位差は.

$$V = -\int_a^b E\,dr$$

$$V = -\int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r l}dr$$

$$= -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\Big[\ln r\Big]_a^b$$

$$= \frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$

電位差なので、絶対値をとり

$$|V| = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}$$

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$= Q \times \frac{1}{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{b}{a}}$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\frac{b}{a}}$$

2. 一様に帯電した半径 a の球ある。球が持つ電荷の和は Q とする。

(1) 球の中心から半径 r の地点の電場を、0 < r ≦ a の場合と、r > a の場合に分けて、それぞれ求めよ。

$0 < r \leq a$ のとき
半径 r の球内の電荷は

$$q = \frac{r^3}{a^3}Q$$

ガウスの法則より

$$4\pi r^2 E = \frac{q}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{a^3}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3}$$

$r > a$ のとき
ガウスの法則より

$$4\pi r^2 E = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

(2) (1)で求めた電場をもとに、球が作る静電場のエネルギーを求めよ。

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int |E|^2 dV$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^a \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{a^3}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_a^\infty \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\times 4\pi \times \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left\{\int_0^a \frac{r^4}{a^6}dr + \int_a^\infty \frac{1}{r^2}dr\right\}$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left\{\left[\frac{r^5}{5a^6}\right]_0^a + \left[-\frac{1}{r}\right]_a^\infty\right\}$$

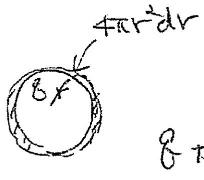
$$U = \frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \left\{\frac{1}{5a} + \frac{1}{a}\right\}$$

$$= \frac{4\pi\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{6}{5a}$$

$$U = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\times\frac{3}{5a}$$

3. 以下、一瞬で出来てしまった人、手も足も出ない人のための空白。

なお.
2(2) の答は. 11/13 の講義であつかった
一様帯電球のバームクーヘン積分と
同じ結果を与える



半径 r の球内の電荷 $q = \frac{r^3}{a^3}Q$

厚さ dr の球殻の電荷

$$dq = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi a^3}Q = \frac{3r^2}{a^3}Q$$

q が r につくるポテンシャル

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

→ 2枚目へつづく

1枚目の
つづき

無限遠から、dq を r へ持ってくるのに必要なエネルギー

$$dU = \varphi dq = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}\underbrace{\frac{r^3}{a^3}Q}_{q}\ \underbrace{\frac{3r^2}{a^3}Q\,dr}_{dq} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^6}3r^4 dr$$

球の半径について、$0<r<a$ で積分

$$U = \int_{r=0}^{r=a} dU = \int_0^a \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a^6}3r^4 dr$$

$$= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{a^6}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a$$

$$U = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{3}{5a}$$ ← 2(2)の答と一致